DOI:10.16537/j.cnki.jynufe.2010.03.002

感悟集中趋势与平均水平的统计测度方法

陈珍珍[1],孙小素[2,1]

(1.厦门大学 经济学院,福建 厦门 361005;2.山东工商学院 统计学院,山东 烟台 264005)

摘　要:为了测定数据的集中趋势与平均水平,统计学家设计了多种度量的方法。从截面数据看,统计学家根据不同的变量类型与次数分布特点,以及个体量与总量的不同对应关系,确定不同的测度方法。从时序数据看,统计学家根据研究的目的和研究对象的特点,确定平均发展速度测度的不同设计方法。各种测度方法都显示出其科学性,但也暴露出其局限性。在统计描述中,应分析各种测度方法使用的前提条件及其特点,才能相得益彰,以求得更好的描述效果。

关键词:集中趋势;平均水平;测度方法;应用条件

中图分类号:F222　文献标志码:A　文章编号:1674-4543(2010)03-0042-05

集中趋势与平均水平的测度是描述统计的重要内容,为了准确描述和深入揭示现象的数量特征及它们的数量关系,统计学家根据研究目的和研究对象的特点,针对不同的变量类型和分布特征,利用数学的理论与方法,设计出不同的集中趋势与平均水平的测度方法,力求其描述尽可能贴近现实,即追求更好的。

一、集中趋势与平均水平之间的关系

(一)集中趋势不能完全等同于平均水平

集中趋势是指一组数据向某一数值靠拢的倾向和程度,平均水平是代表总体的一般水平。两者既有区别,又有联系。理顺集中趋势与平均水平之间的关系,是因为在一些统计学的教科书[1]中,有人笼统地把众数(M_o)和中位数(M_e)称为位置平均数,用来反映变量数列的一般水平,同时又想当然地把数值平均数作为集中趋势的重要测度指标。我们认为,之所以会出现这样的疏漏,其根源就在于将集中趋势与平均水平混为一谈。

理论界有人不赞同称众数和中位数为位置平均数,理由是众数和中位数不是由平均方法计算所得,而是由其次数或特殊位置决定的。我们认为,众数和中位数指标的使用是有前提条件的。其一,变量必须是数值型变量,因为只有数值型变量计算其平均水平才有意义;其二,数值型变量的分布必须是钟型的。只有同时满足上述的两个条件,变量的集中趋势才能等同于其一般水平。[2-3]例如,在组距分组的情况下,U型分布无法确定众数。对于单项式数列的U型分布,可能有两个众数,也可能只有一个众数。它可能是变量的最小值,也可能是变量的最大值,或者两者兼有。不管是哪一个,众数都不能表示变量的一般水平。U型分布的中位数在其底部中央,虽然不能表示数据的集中趋势,但却是数据的中等水平。同理,对于J型分布,其众数和中位数数据也不能作为平均水平的代表。

(二)平均水平也不能完全等同于集中趋势

在有些统计学教科书[1]中,把数值平均数作为集中趋势的重要测度指标加以介绍。虽然,这不是一个绝对的错误,但必须阐明这样处理的前提条件。最典型的一个例子是,当数值型变量不存在众数时,即该变量在不存在集中趋势的情况下,依然可以计算出它的平均水平。也就是说,虽然在很多

收稿日期:2010-01-13

作者简介:陈珍珍(1951-),女,福建厦门人,厦门大学经济学院教授,博士生导师,主要研究方向为统计理论与方法;孙小素(1965-),女,河南焦作人,厦门大学经济学院在读博士,山东工商学院副教授,主要研究方向为统计理论与方法。

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

情况下平均水平可以表示集中趋势，但并非所有情况。因此，在用平均水平表示数据的集中趋势时，应注意它的前提条件。

二、三种测度指标适用范围的探讨

统计学家设计的反映集中趋势或平均水平的测度指标主要有三类：众数、中位数和数值平均数。每类指标特点鲜明，适应对象的范围差异很大。

（一）不同变量类型的集中趋势测度

统计学涉及到三种不同类型的变量：分类变量、顺序变量和数值型变量。分类变量是按照现象的某种属性进行平行分类的，它不反映各类之间的顺序或差距。顺序变量用于测度客观现象各类之间的等级差或顺序差。数值型变量表现为具体的数值，它不仅可以反映客观现象的类别不同和顺序差异，而且可以用确切的数值反映现象之间在量方面的差异。

用众数反映变量数列的集中趋势最直接、最名副其实。不仅如此，众数的适用范围也最广，无论是分类变量，或是顺序变量，还是数值型变量皆适用。

能否用中位数来反映现象的集中趋势，理论界是有争议的。持否认意见者认为：中位数是一个由其所处的特殊位置所决定，用以反映现象的集中趋势过于牵强。笔者认为中位数虽然是由其特殊位置所确定，但它反映了现象的中等水平，说明现象的一般状况，用于描述现象的集中趋势未尝不可。在不同的变量类型的集中趋势测度中，中位数与众数不同的是：用中位数反映变量数列的集中趋势是有条件的，只有顺序变量和数值型变量才可能用中位数反映其集中趋势，分类变量不能用中位数表示其集中趋势。这是因为顺序变量和数值型变量才能够排出顺序，而分类变量无法排出数据的大小顺序，可见中位数的适用范围小于众数。

数值平均数主要包括算术平均数、几何平均数和调和平均数，这里，我们仅讨论算术平均数（$\bar{x}$）。虽然用算术平均数（$\bar{x}$）反映变量数列的集中趋势没有众数直观，但在一定的条件下，它仍然是测度变量数列集中趋势的重要指标。从理论上分析其原因：其一，从车贝晓夫大数定律可以得知，大量的独立随机因素对总体的影响，当对其进行平均后将稳定于总体平均数。其二，从算术平均数的计算公式 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i}$ 也可以看出，相对权数 $\frac{f_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i}$ 越大的变量值，对平均数的影响越大。换言之，平均数值趋于相对权数大的变量值。在客观实际中，许多社会现象统计总体的分布都趋于钟形分布。例如，农作物的单位面积产量的分布、零件公差的分布、商品市场价格的分布等。而钟形分布最大的特点是，变量的平均水平往往是数列分布最密集的地方。在这种情况下，用数值平均数表示变量分布的集中趋势是符合客观现象的特征的。

综上所述，在测度数列的集中趋势时，众数的适用范围最宽，它适用于三种变量类型。中位数次之，它适用于其中两种变量类型，不适用于分类变量。数值平均数的适用范围最窄，仅适用于数值型变量。

（二）不同分布类型的集中趋势测度

由于现象的性质不同，它们形成各种不同类型的分布特征，主要表现为：钟型分布、U型分布、J型分布、均匀分布和梯形分布等。对于不同类型的分布，其集中趋势和平均水平的测度方法也不同。如上所述，众数对不同的变量类型的集中趋势测度，对比中位数和数值平均数，具有绝对的优势。但从次数分布类型分析，它的使用却受到了较大的限制，即有些分布数列不存在众数或者难以确定众数。例如，梯形分布的众数是某一个区间，无法确定其具体的数值。对于均匀分布，也是无法确定众数的。U型分布和J型分布确定众数须视具体情况而定，在组距分组的情况下，无法确定众数。分析众数的计算公式为：

$$M_0 = I_{M_0} + \frac{f_{M_0} - f_{M_0-1}}{(f_{M_0} - f_{M_0-1}) + (f_{M_0} - f_{M_0+1})} \times d_{M_0} \qquad (1)$$

公式（1）中，I_{M_0}代表众数组的下限，f_{M_0}代表众数组的次数，f_{M_0-1}为众数组前一组的次数，f_{M_0+1}为众数组后一组的次数，d_{M_0}代表众数组的组距。组距式数列的U型分布和J型分布，对于f_{M_0-1}或

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

f_{M_0+1}，可能其中有一个我们无法得到。[2] 无法确定众数的现象，实质上是不存在集中趋势的，当然也就不存在集中趋势的测度问题。而这一现象也显示了众数的另一种功能，即可以根据众数是否存在来判定变量数列有无集中趋势。同时，这也揭示了众数具有不确定性的特征。如果分布数列没有明显的集中趋势或最高峰点，众数就不存在，如果有多个高峰点，就有多个众数。

要想用中位数反映变量数列的集中趋势，变量必须是钟形分布的。因为，对于 U型分布，中位数不仅不是变量数列的集中趋势，恰恰相反，它是变量数列分布最稀疏的地方。而对于 J型分布，中位数所表示的密集程度只相当于数列最集中程度的一半左右。因此，对于 U型分布和 J型分布的顺序变量和数值型变量，其集中趋势不能用中位数来测度。

在完全对称的钟形分布的条件下，众数、中位数和算术平均数三者相等。此时，用算术平均数测度集中趋势既直观又方便，数值平均数作为集中趋势的测度指标是名副其实的。对于右偏的钟形分布，数值平均数会比众数偏大。对于左偏的钟形分布，数值平均数又会比众数偏小。这是因为数值平均数是由全体变量值决定的，当数列出现极端值时，它直接影响平均数的变化，而众数是由次数多少决定的，它几乎不受极端值的影响。因此，在变量分布非对称情况下，数值平均数只是数据集中趋势的一个近似值，其近似的程度随钟型分布的偏斜程度而变化，偏斜程度越小，用数值平均数反映数据的集中趋势就越精确，反之，则越不精确。

上文讨论的结论告诉我们，虽然三个测度指标的设计都是科学的，但是在具体使用中，它们各有自己的局限性，换言之，就是没有最好的。当考察的对象是非正态分布的情况下，三个指标相互补充，才能相得益彰，得到更好的结果。例如，根据国家统计局公布的数据，2009年第一季度城镇单位就业人员平均劳动报酬比上年同期增长了 12.8%，[4] 该数据被网友质疑：工资“被增长”。分析其原因，2009年第一季度个别行业某些阶层人员的工资大幅度增长，这必然影响到平均值，使总体的平均劳动报酬上升。而大部分的就业人员并没有增长工资，于是，他们就产生了对数据的质疑。劳动报酬的分布是属于钟型、偏态分布，若统计局能再增加公布劳动报酬众数的数据，用于说明大部分人的劳动报酬水平，再辅之劳动报酬的中位数，用于说明城镇单位就业人员劳动报酬的中等水平，将可免遭质疑。

三、个体量与总量的对应关系决定了数值平均数的计算方法

一般教科书都会介绍数值平均数的两种算法——算术平均数和几何平均数，也有教科书将调和平均数作为算术平均数的一种变形加以介绍，并指出算术平均数（包括调和平均数）用于计算静态的各个单位标志的平均数，而几何平均数用于计算时间上相互衔接的比率的平均数。至于其中的原因，却没有进行任何分析。

笔者认为，之所以会存在不同的数值平均数计算方法，根本原因在于个体量与总量的不同对应关系。这里个体量是指单位的标志表现，即我们研究的统计总体中的每个个体（单位）的具体观察值，总量是指总体的标志总量。由于研究对象的特点不同，个体量（或称个体的标志表现）与总量的基本对应关系也不同。一般说来，个体量与总量之间存在两种不同的对应关系：和的关系与积的关系。

（一）和的关系

$$总量 = \sum_{i=1}^{N} 个体量 \qquad (2)$$

公式（2）是我们最熟知、最常见的反映个体量与总量的关系。例如，一国奥运会的金牌总数，是该国参加奥运会的运动员获得的金牌数之和。又如，一个国家的 GDP是其所有经营单位的增加值之和等等。对于这种数量对应关系，数值平均数的计算必须采用算术平均方法（若所已知的数据是总量，就用调和平均方法）。

值得一提的是，公式（2）使用的前提条件是：个体量是数值型变量，并且是可以直接加总的绝对数，在求其算术平均时是直接用标志总量除以总体单位数。但是，当个体量若是相对数，如利润率、流通费用率、恩格尔系数等等，测定其平均数时必须利用相应的权数处理，其权数的选择取决于原有相对数的内涵。例如，要求一个城市全部超市的平均流通费用率，不能直接将该城市各个超市的流通费用率加总而后求简单算术平均数。假设该城市平均流通费用率用 $\bar{v}$表示，每个超市的流通费用率为

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

v_i，每个超市的销售额为 x_i，则平均流通费用率：

$$\bar{v}=\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i} \tag{3}$$

公式（3）中，权数是根据流通费用率的内涵决定的，由销售额 x_i作为权数。而不是用 $\bar{v}=\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i}{N}$ 计算，原因是这里的总流通费用率 $v\neq\sum_{i=1}^{N} v_i$。

（二）积的关系

$$总量=\prod_{i=1}^{N} 个体量 \tag{4}$$

公式（4）描绘了总量与个体量之间积的关系，现实中这种对应关系也很常见。如某一期间经济的总发展速度，就等于期间各年的经济发展速度连乘积。连续几道工序加工出来的产品的合格率，就等于这几道工序各自合格率的连乘积等等。对于这种数量对应关系，数值平均数的计算就必须采用几何平均方法，而不能使用算术平均方法。

同样，公式（4）的使用也是有前提条件的，这里的个体量必须是数值型变量，并且是具有相同计算模式的相对数，同时要求它们必须是最原始计算的相对数或者最符合客观规律的相对数。例如，求一段时期的平均增长速度，虽然增长速度是数值型变量且是相对数，符合计算的要求，但是不能将该时期的各个年份（或季、月）增长速度连乘而后求几何平均数——平均增长速度，必须利用最原始计算的相对数——环比发展速度连乘而后求几何平均数——平均发展速度，通过平均发展速度再求平均增长速度。又如，计算连续作业车间（工序）平均废品率，也不能将这些连续作业各个车间（工序）的废品率连乘而后求平均废品率，而是应通过各个车间（工序）的合格品率计算平均合格品率，从而再计算平均废品率。理由是，后一车间（工序）的加工，只能是在前一车间（工序）合格品的基础上进行的，而不是在前一车间（工序）废品的基础上进行的，只能通过平均合格品率的转换计算平均废品率，这才符合客观规律。

四、研究目的和研究对象的特点决定了平均发展速度的测度方法

对于动态平均数（序时平均数），统计学家根据不同的研究目的以及研究对象的不同特点，设计了平均发展速度的两种计算方法：几何平均法和高次方程法。

（一）几何平均法

当研究的目的是侧重考察现象最末期发展水平，不太关心现象的发展过程，更主要关心发展的最终结果，适用几何平均法。统计学家利用现象存在的总量与个体量之间的积的关系，设计平均发展速度的计算公式：

$$平均发展速度\ \bar{b}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}=\sqrt[n]{y_n/y_0} \tag{5}$$

公式（5）中，b_i表示第 i 期的环比发展速度，$\bar{b}$表示平均发展速度，y_n表示时间序列第 n期的发展水平，y_0表示时间序列的最初发展水平。[2-3]

从公式（5）的设计可知，几何平均法的计算依据是时间序列的最初发展水平 y_0和第 n期的发展水平 y_n（末期的发展水平），而中间各期的水平变化对平均发展速度的计算结果并没有影响。因此，用公式（2）计算的序时平均数来推算最后一期的发展水平，与实际资料最末期的定基发展速度是相一致的。该方法既适合于时期数列，也适合于时点数列。

（二）高次方程法

如果更关心现象的发展过程的累积，如一段时期的投资额、绿化面积等，统计学家利用现象存在的总量与个体量之间的积的关系，设计高次方程法。高次方程法的设计思想如下：利用统计变换，把

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

现象各期的量(发展水平)由最初的水平与相应时期的环比发展速度的连乘积表示,对各期的量求和,将积的形式转换为和的形式。

令时间序列第 期的发展水平,可得:$y_i = y_0 \times b_1 \times \cdots \times b_i$ 可得:

$\sum_{i=1}^{n} y_i / y_0 = b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \cdots + b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$,若以平均发展速度 $\bar{b}$ 代替各期环比发展速度 b_i,可得下式:

$$\bar{b} + \bar{b}^2 + \cdots + \bar{b}^n = \sum_{i=1}^{n} y_i / y_0 \qquad (6)$$

公式(6)的各符号的含义同公式(5),通过解公式(6)方程即可得到平均发展速度 $\bar{b}$。从公式(6)的设计过程可以看出,它是由累加而得的。高次方程法不仅考虑了各期的水平(b_1, b_2, b_3, …, b_n),而且考察了各期定基发展速度的总和 $\sum_{i=1}^{n} y_i / y_0$。[2] 利用该方法计算的各期定基发展速度的总和的理论值与实际资料各期定基发展速度的总和相一致,因此,高次方程法只适用于时期序列,因为只有时期序列才具有可累加性。

综上所述,统计不同于数学。就数学而言,数字是抽象的,方法选定后,对每个问题都有惟一的正确答案,即存在最好。而统计中的数据则是鲜活的,数据是有实际含义的,必须根据研究现象的特点设计测度方法。或许某种现象可以用多种方法去描述它,但只有一种方法是最恰当的。因此,就统计方法而言,只有更好,没有最好。

参考文献:

[1] 吴凤庆,王艳明.统计学[M].北京:科学出版社,2008.

[2] 陈珍珍,罗乐勤.统计学[M].厦门:厦门大学出版社,2007.

[3] 朱建平,孙小素.应用统计学[M].北京:清华大学出版社,2009.

[4] 中华人民共和国国家统计局.城镇单位就业人员劳动报酬(1季度)[EB/OL].(2009-07-09). http://www.stats.gov.cn/tjsj/jdsj/20090709_402571023.htm.

责任编辑、校对:李品秀

The Apperception on the Measurement Methods of Central Tendency and Average Level

CHEN Zhen-zhen, SUN Xiao-sui[1]

(1. School of Economics, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. School of Statistics, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, China)

Abstract: Many measurement methods were designed by statisticians to measure the central tendency and the average level of data. From the angle of cross-sectional data, different kinds of measurement methods are decided by statisticians based on the characteristics of different variable types and the frequency distribution and the different corresponding relation between the individual variable and the total; from the angle of time series data, statisticians decide different design methods to measure the average development speed according to the characteristics of the research purpose and objects. Each measurement method has its scientific nature and limitations. In the statistical description, better descriptive results can be achieved by analyzing the presuppositions and the characteristics of the measurement methods.

Key words: Central Tendency; Average Level; Measurement Methods; Application Conditions

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net