参数的区间估计与假设检验方法的探讨

段福林[1], 徐　健[2]

（1. 广州大学, 广东 广州 510006; 2. 上饶师范学院, 江西 上饶 334001）

摘　要: 利用枢轴量法和显著性假设检验方法讨论两正态总体参数的线性函数的显著性假设检验问题和若干非正态总体参数的区间估计及显著性假设检验问题。

关键词: 正态总体参数线性函数; 非正态总体参数; 区间估计; 枢轴量法; 假设检验

中图分类号: O213. 2　　文献标识码: A　　文章编号: 1004－2237(2008)03－0007－05

1　引言

随着科学技术和生产的不断发展, 数理统计的应用更加广泛, 而区间估计和假设检验问题在统计应用中一直占有很重要的地位。对于正态总体下参数的区间估计和假设检验问题, 各类教材都有比较详尽的介绍, 而非正态总体下参数的区间估计和假设检验, 一般教材涉略不多。但实际应用中, 不仅涉及正态总体参数, 也涉及正态总体参数的函数的估计问题, 甚至涉及非正态总体参数的估计问题, 为此本文初步探讨了两正态总体的一二阶矩线性函数的显著性假设检验和几个非正态总体参数的区间估计和假设检验方法。

2　正态总体参数线性函数的假设检验

下面讨论两个正态总体的数学期望或方差的线性函数的显著性假设检验方法。

假设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 的样本, 观测值为 $x_1, \cdots, x_n$, 样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 样本方差为 $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$; $Y_1, \cdots, Y_m$ 是来自正态总体 $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 的样本, 观测值为 $y_1, y_2, , \cdots, y_m$, 样本均值为 $\bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$, 样本方差为 $S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2$, 且两总体 X 与 Y 及两样本间相互独立。

2.1　总体期望线性函数的显著性检验

(1) 设 σ_X^2, σ_Y^2 已知, a、b 为常数, 且 $a \neq 0$。在显著性水平 α 下检验假设

$$H_{10}: \mu_X = a\mu_Y + b; \quad H_{11}: \mu_X \neq a\mu_Y + b \tag{2.1}$$

$$H_{20}: \mu_X = a\mu_Y + b; \quad H_{21}: \mu_{\bar{X}} > a\mu_{\bar{Y}} + b \tag{2.2}$$

$$H_{30}: \mu_X = a\mu_Y + b; \quad H_{31}: \mu_{\bar{X}} < a\mu_{\bar{Y}} + b \tag{2.3}$$

根据假设检验的一般步骤和正态分布的线性性, 我们可选取检验统计量

收稿日期: 2008－03－05

作者简介: 段福林(1982－), 男, 江西余干人, 广州大学数学与信息科学学院应用数学专业的统计精算与金融数学方向研究生。

$$Z=\frac{\bar{X}-(a\bar{Y}+b)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{a^2\sigma_y^2}{m}}}$$

在原假设 H_0 成立和给定显著性水平 α 下,易得到检验假设(2.1)~(2.3)的拒绝域W 的基本形式分别为:

$$\{W: |Z|=\left|\frac{\bar{x}-(a\bar{y}+b)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{a^2\sigma_y^2}{m}}}\right|>z_{\alpha/2} \text{或} \ |\bar{x}-(a\bar{y}+b)|>z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{a^2\sigma_y^2}{m}}\} \tag{2.4}$$

$$\{W: \bar{x}-(a\bar{y}+b)>z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{a^2\sigma_y^2}{m}}\} \tag{2.5}$$

$$\{W: \bar{x}-(a\bar{y}+b)<-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{a^2\sigma_y^2}{m}}\} \tag{2.6}$$

最后在满足 $P_{H_0}\{T(X_1,\cdots\cdots,X_n)\in W\}\leq\alpha$ 下,确定临界值,作出相应的拒绝或接受原假设的判断。

(2)设 σ_x^2,σ_y^2 未知,但 $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma^2$,在显著性水平 α 下检验假设

$$H_{40}: \mu_x=a\mu_y+b;\quad H_{41}: \mu_x\neq a\mu_y+b; \tag{2.7}$$

根据正态总体样本方差的统计性质,可选取如下的检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-(a\bar{Y}+b)}{S\sqrt{\frac{m+n}{mn(m+n-2)}}}\sim t(n+m-2)$$

对给定的 α,得到其拒绝域为 $\{W: |t|>t_{\alpha/2}(m+n-2)\}$。类似地,也可以讨论单边检验假设问题。

2.2 方差比例关系的显著性检验

设常数 $c>0$,在水平 α 下检验假设

$$H_{50}: \sigma_X^2=c\sigma_Y^2;\ H_{51}: \sigma_X^2\neq c\sigma_Y^2 \tag{2.8}$$

由于 $E(S_X^2)=\sigma_X^2$, $E(cS_Y^2)=c\sigma_Y^2$,假若 H_{50} 成立,则 $\frac{S_X^2}{cS_Y^2}$ 约为1,否则 $\frac{S_X^2}{cS_Y^2}$ 显著不等于1,从而可取枢轴量为

$$F=\frac{S_X^2}{cS_Y^2}$$

找到 k_1 与 k_2,拒绝域的形式为:$\left\{\frac{S_X^2}{cS_Y^2}<k_1, \text{或者} \frac{S_X^2}{cS_Y^2}>k_2\right\}$。

而当 H_{50} 为真时有

$$F=\frac{S_X^2}{cS_Y^2}\sim F(n-1,m-1) \tag{2.9}$$

故对给定的 α,容易计算出其拒绝域为

$$\{W: \frac{S_X^2}{S_Y^2}<cF_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1), \text{或者} \frac{S_X^2}{S_Y^2}>c\,F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\} \tag{2.10}$$

3 常见非正态总体参数的区间估计和假设检验

利用枢轴量法也可对非正态总体参数的区间估计和假设检验进行讨论。

3.1 指数分布参数的区间估计和假设检验

设总体服从指数分布,密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$;其中 $\lambda(\lambda>0)$ 未知,$X_1\cdots\cdots,X_n$ 是来自总体X 的样本,$x_1\cdots\cdots,x_n$ 是样本观测值,求 λ 的 $1-\alpha$ 置信区间和检验假设

$$H_0: \lambda\geq\lambda_0(\lambda_0\text{为已知数}); H_1: \lambda\neq\lambda_0 \tag{3.1}$$

由于$\frac{1}{\bar{X}}$是λ的一个点估计，因此λ的置信区间可以通过$\bar{X}$而依赖于样本，注意到$2\lambda\bar{X}$的概率密度为[2]

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases};$$

它与λ无关，且正好是$\chi^2(2)$的密度函数。又根据χ^2分布的可加性，$2\lambda n\bar{X}\sim\chi^2(2n)$，可见$2\lambda n\bar{X}$符合枢轴量的条件，故取枢轴量$T=2\lambda n\bar{X}$。对给定的正数α，有

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)\le 2\lambda n\bar{X}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)\right\}=1-\alpha \tag{3.2}$$

其中$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)$和$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)$是$\chi^2(2n)$分布的α分位点。

由(3.2)式得，$P\left\{\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\bar{X}}\le\lambda\le\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\bar{X}}\right\}=1-\alpha$，于是λ的$1-\alpha$置信区间为：$\left[\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\bar{X}}, \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n\bar{X}}\right]$。

对检验(3.1)，在H_0(即$\lambda=\lambda_0$)成立时，$\lambda_0\bar{X}$的观测值接近于1，于是可取原假设H_0的拒绝域为：$\{\lambda_0\bar{X}<c_1$或$\lambda_0\bar{X}>c_2\}$，为了确定c_1和c_2，由$2\lambda n\bar{X}\sim\chi^2(2n)$，得知在$H_0$成立时，有$2\lambda_0 n\bar{X}\sim\chi^2(2n)$。而

$$P_{H_0}\{\lambda_0\bar{X}<c_1 \text{ 或 } \lambda_0\bar{X}>c_2\}=P_{H_0}\{2n\lambda_0\bar{X}<2nc_1\}+P_{H_0}\{2n\lambda_0\bar{X}>2nc_2\}$$

于是，为了控制犯第一类错误的概率不超过α，且尽可能接近α，可取

$$P_{H_0}\{2n\lambda_0\bar{X}<2nc_1\}=\frac{\alpha}{2}, P_{H_0}\{2n\lambda_0\bar{X}>2nc_2\}=\frac{\alpha}{2}$$

在显著性水平α下，原假设H_0的拒绝域为：$\left\{\lambda_0\bar{X}<c_1=\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2n}\text{或}\lambda_0\bar{X}>c_2=\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n}\right\}$。

3.2 非正态分布总体参数的近似区间估计和假设检验

很多场合下，要找到一个有精确分布的枢轴量是很困难的，因此构造具有渐近分布的枢轴量，以求得参数的近似置信区间就显得很有必要。我们将利用中心极限定理来获得一些常见非正态总体参数的近似置信区间。虽然这样的区间估计不一定能保证准确的置信度，但在样本容量较大时仍然是适用的。

3.2.1 泊松分布总体参数的近似区间估计和假设检验

设总体X服从泊松分布$P(\lambda)$，其中λ未知($\lambda>0$)，$X_1\cdots\cdots, X_n$是来自总体X的样本，样本观测值为$x_1\cdots\cdots, x_n$，求λ的$1-\alpha$置信区间和检验假设

$$H_0:\lambda=\lambda_0(\lambda_0\text{为已知数}), H_1:\lambda\ne\lambda_0 \tag{4.1}$$

因$X_1, \cdots\cdots X_n$相互独立都服从同一分布，且$E(X_i)=\lambda, D(X_i)=\lambda(i=1,2,\cdots,n)$，根据独立同分布中心极限定理和分位点定义，当n比较大时

$$P\left\{-z_{\alpha/2}\le\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\le z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha$$

而不等式$-z_{\alpha/2}\le\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\le z_{\alpha/2}$等价于$\lambda^2-\left(2\bar{X}+\frac{z_{\alpha/2}}{n}\right)\lambda+\bar{X}^2\le 0$，于是λ的近似$1-\alpha$置信区间的上、下限为：

$$\hat{\lambda}_{12}=\frac{2\bar{X}+\frac{z_{\alpha/2}}{n}\pm\sqrt{(2\bar{X}+\frac{z_{\alpha/2}}{n})^2-4\bar{X}^2}}{2}$$

由于n比较大，$\lambda>0$，可忽略高阶小量，取置信上、下限为：$\left(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}, \bar{X}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\right)$。

对检验问题(4.1)，$\bar{X}$也是λ的无偏估计量，所以H_0成立时，$\bar{X}$与λ_0应比较接近。取原假设H_0的拒绝域形如：$W=\{(x_1,\cdots,x_n)|\bar{X}-\lambda_0<c_1$或$\bar{X}-\lambda_0>c_2\}$。为了确定$c_1, c_2$，注意到在$H_0$成立时，根据泊松分布可加

性: $n\bar{X}\sim\pi(n\lambda_0)$, 故可改取拒绝域为 $W=\{(x_1,\cdots,x_n)|n\bar{X}<k_1$ 或 $n\bar{X}>k_2\}$。由于

$$P_{H_0}\{n\bar{X}<k_1 \text{ 或 } n\bar{X}>k_2\}=P_{H_0}\{n\bar{X}<k_1\}+P_{H_0}\{n\bar{X}>k_2\}$$
$$=\sum_{j=0}^{k_1-1}\frac{(n\lambda_0)^j}{j!}e^{-n\lambda_0}+\sum_{j=k_2+1}^{\infty}\frac{(n\lambda_0)^j}{j!}e^{-n\lambda_0}$$

对给定的 α, 要使 $P_{H_0}\{n\bar{X}<k_1$ 或 $n\bar{X}>k_2\}\leq\alpha$ 且尽可能接近于 α, 只需取 $\sum_{k=0}^{c_1-1}\frac{(n\lambda_0)^k}{k!}e^{-n\lambda_0}\leq\frac{\alpha}{2}$ 且尽可能接近于 $\frac{\alpha}{2}$, $\sum_{k=c_2}^{+\infty}\frac{(n\lambda_0)^k}{k!}e^{-n\lambda_0}\leq\frac{\alpha}{2}$ 且尽可能接近于 $\frac{\alpha}{2}$。故可取 $k_1=\max\left\{d\left|\sum_{j=0}^{d-1}\frac{(n\lambda_0)^j}{j!}e^{-n\lambda_0}\leq\frac{\alpha}{2}\right.\right\}$ 和 $k_2=\min\left\{d\left|\sum_{j=d+1}^{\infty}\frac{(n\lambda_0)^j}{j!}e^{-n\lambda 0}\leq\frac{\alpha}{2}\right.\right\}$

3.2.2 几何分布总体参数的近似区间估计

引理 1[3] 对常数 $\alpha>-\sqrt{n}$, p 的方程 $\sqrt{n}\frac{p\bar{X}-1}{\sqrt{1-p}}=\alpha$ 在 $(0,1)$ 内有唯一正根。

引理 2[3] 当 $0<\alpha<\sqrt{n}$ 时, 关于 p 的方程 $\sqrt{n}\frac{p\bar{X}-1}{\sqrt{1-p}}=\alpha$ 和 $\sqrt{n}\frac{p\bar{X}-1}{\sqrt{1-p}}=-\alpha$ 的两根为 $\hat{p}_{12}=\frac{2n\bar{X}-\alpha^2\pm\sqrt{\alpha^4-4n\bar{X}\alpha^2+4n\bar{X}^2\alpha^2}}{2n\bar{X}^2}$。

由引理 1, 引理 2 所述, 几何分布 $G(p)$ 中参数 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似区间估计为:

$$\left[\frac{2n\bar{X}-\alpha^2-\sqrt{\alpha^4-4n\bar{X}\alpha^2+4n\bar{X}^2\alpha^2}}{2n\bar{X}^2},\frac{2n\bar{X}-\alpha^2+\sqrt{\alpha^4-4n\bar{X}\alpha^2+4n\bar{X}^2\alpha^2}}{2n\bar{X}^2}\right]$$

注: 关于"$\alpha<\sqrt{n}$"这一条件, 由于我们研究的是大样本场合, 因此这一条件是满足的。

3.2.3 柯西分布总体参数的近似区间估计

引理 3[4] 若总体 X 的密度函数为 $p(x)$, 其中位数为 m, 且 $p(m)\neq 0$. 而 $X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的一个样本, 其中样本中位数为 X_{med}, 则 $Y_n=\sqrt{n}(X_{med}-m)$ 的极限分布为 $N\left(0,\frac{1}{4[p(m)]^2}\right)$。

设总体 X 服从柯西分布 $p(x,\mu)=\frac{1}{\pi[1+(x-\mu)^2]}$, μ 未知, $-\infty<x<+\infty$, $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本。

由于柯西分布不存在数学期望, 因此不能用矩法求 μ 的估计量。若用最小二乘法使 $\sum_{i=0}^{n}(x_i-\mu)^2$ 最小, 则得 $\hat{\mu}=\bar{X}$, 很难说明 $\bar{X}$ 是 μ 的一个合适的估计量, 因为这时无偏性、有效性都失去意义, 而且 $\bar{X}$ 与 X 同分布, 说明 $\bar{X}$ 也没有起汇集 μ 的信息的作用, 这个估计量的相合性也无从谈起。而若用 μ 的极大似然估计, 由于其对数似然函数为

$$\ln L(\mu)=n\ln\pi+\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{1}{[1+(x_i-\mu)^2]}$$

对数似然方程为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu}{[1+(x_i-\mu)^2]}=0$$

这个方程只能求数值解(比如用牛顿法), 也没有简便的表达式。但注意到 μ 是总体分布的中位数, 因此可以用样本中位数作为初值。由引理 3 知, 柯西分布总体的一个容量为 n 的样本中位数 $X_{med}\sim N(\mu,\frac{\pi}{4n})$。根据独立同分布中心极限定理: $T=\frac{2\sqrt{n}(X_{med}-\mu)}{\pi}\sim N(0,1)$。于是当 n 比较大时

$$P\left\{-z_{\alpha/2}\leq\frac{2\sqrt{n}(X_{med}-\mu)}{\pi}\leq z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha$$

而$-z_{\alpha/2}\leq\frac{2\sqrt{n}(X_{med}-\mu)}{\pi}\leq z_{\alpha/2}$等价于$\mu^2-2\mu X_{med}+X_{med}^2-\frac{\pi^2 z_{\alpha/2}^2}{4n}\leq 0$。于是$\lambda$的近似$1-\alpha$置信区间的上、下限为:

$$\hat{\lambda}_{12}=\frac{2X_{med}\pm\sqrt{4Z_{med}^2-4(X_{med}^2-\frac{\pi^2 z_{\alpha/2}^2}{4n})}}{2}$$

由于 n 比较大时,$\lambda>0$, 亦可忽略高阶小量, 取近似置信区间为:$(0, 2X_{med})$。

4　实例

某药厂生产一种新的止痛片, 厂方希望服用新药片后开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半, 因此厂方提出需检验假设:$H_0:\mu_1\leq 2\mu_2$, $H_1:\mu_1>2\mu_2$。此处μ_1,μ_2分别是服从原有止痛片和新有止痛片后至起作用的时间间隔的总体的均值。设两总体均为正态分布, 且方差分别为已知值σ_1^2和σ_2^2, 现分别在两总体中各取一样本:$X_1, X_2, \cdots, X_n$和$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, 设两个样本独立, 试求检验拒绝域(取显著性水平为α)。

解　由$E(X)=\mu_1$, $E(X)=\mu_2$; $D(X)=\sigma_1^2$, $D(X)=\sigma_2^2$。所以$\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n})$, $\bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n})$, 且$\bar{X}$, $\bar{Y}$相互独立, $E(\bar{X}-2\bar{Y})=\mu_1-2\mu_2$, $D(\bar{X}-2\bar{Y})=\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{4n}$, 从而$\bar{X}-2\bar{Y}\sim N(\mu_1-2\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{4n})$。

当H_0为真时, 统计量$\frac{\bar{X}-2\bar{Y}}{\left(\frac{\sigma_1^2+4\sigma_2^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}\sim N(0,1)$, 有$P\{|\bar{X}-2\bar{Y}|>z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma_1^2+4\sigma_2^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\}=\alpha$。所以拒绝域为$W=\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)\,|\,|\bar{X}-2\bar{Y}|>z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma_1^2+4\sigma_2^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\}$。

参考文献:

[1] 魏宗舒, 概率论与数理统计教程[M], 北京: 高等教育出版社, 1983, 315－333.
[2] 茆诗松, 王玲玲, 可靠性统计[M], 上海: 华东师范大学出版社, 1984.
[3] 徐晓岭, 孙祝岭, 王磊, 几何分布参数的区间估计和统计贴近性研究[J], 强度与环境, 2005, 32(2): 57.
[4] 李贤平, 沈荣圣, 陈子毅, 概率论与数理统计[M], 上海: 复旦大学出版社, 2003, 366－367.

Exploration of Parametric Interval Estimate and Hypothesis Testing

DUAN Fu-lin[1], XU Jian[2]

(1. Guangzhou University, Guangzhou Guangdong 510006, China;
2. Shangrao Normal College, Shangrao Jiangxi 334001, China)

Abstract: In this paper, We discuss the overall parameters significant hypothesis testing of linear function of two normal distributions and interval estimate and significant hypothesis testing of some nonnormal distributions by using the pivot method and significant method of hypothesis testing.

Key Words: The parametric linear function of normal distribution population; the parameters of nonnormal population; interval estimate; pivot method; testing hypotheses