第二章 多项式

精选例题解析

例 1 m,p,q适合什么条件时，有

$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$。

解法 1 待定系数法

如果 $x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$

则可设 $x^3+px+q=\left(x^2+mx-1\right)(x+a)$

将上式右端展开，再比较同次项的系数，得

$$\begin{cases} a+m=0 \\ ma-1=p \\ -a=q \end{cases}$$

解得 $q=m, p=-m^2-1$

即当 $q=m, p=-m^2-1$时，

$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$。

解法 2　带余除法

应用除法，求得商式及余式，令余式为零，从而得到所求条件。

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2+mx-1 & \quad x^3+px+q & x-m \\
 & x^3+mx^2-x & \\
\cline{2-2}
 & -mx^2+(p+1)x+q & \\
 & -mx^2-m^2x+m & \\
\cline{2-2}
 & (p+1+m^2)x+q-m & \\
\end{array}
$$

余式为 $(p+1+m^2)x+q-m=0$。

于是得

$$\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$$

因此知，当$q=m, p=-m^2-1$时

$x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$。

例 2 求$u(x), v(x)$使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=\left(f(x),g(x)\right)$$

其中

$$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$$

$$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$$

解：辗转相除，然后反代，可得$u(x), v(x)$。

	$g(x)$	$f(x)$	
$x+1$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$	1
	x^4-2x^2	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	
	x^3+x^2-2x-2	x^3-2x	x
	x^3-2x	x^3-2x	
	x^2-2	0	

$$q_1(x)=1, q_2(x)=x+1, q_3(x)=x$$

用等式写出来：

$$f(x) = 1 \cdot g(x) + x^3 - 2x$$

$$g(x) = (x+1)(x^3 - 2x) + x^2 - 2$$

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$$

所以 $$(f(x), g(x)) = x^2 - 2$$

而且

$$x^2-2=g(x)-(x+1)(x^3-2x)$$
$$=g(x)-(x+1)(f(x)-g(x))$$
$$=-(x+1)f(x)+(x+2)g(x)$$

所以

$$u(x)=-x-1,v(x)=x+2,$$
$$(f(x),g(x))=x^2-2$$

例 3 证明：如果$d(x)\mid f(x), d(x)\mid g(x)$，且存在$u(x), v(x)$使得

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

则 $d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

证明:设$\varphi(x)$是$f(x)$与$g(x)$的任一公因式，则

$$\varphi(x)\mid f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$$

又$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式，从而由最大公因式的定义知，$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

例 4 设$f(x),g(x),h(x)\in F[x]$，

若$(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$，

则$(f(x),g(x)h(x))=1$。

证明：由最大公因式的存在表示定理知，

存在$u_1(x),v_1(x)$，使得

$$f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=1$$

存在$u_2(x),v_2(x)$，使得

$$f(x)u_2(x)+h(x)v_2(x)=1$$

所以

$$1=(f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x))(f(x)u_2(x)+h(x)v_2(x))$$
$$=f(x)[f(x)u_1(x)u_2(x)+h(x)u_1(x)v_2(x)$$
$$+g(x)u_2(x)v_1(x)]+g(x)h(x)v_1(x)v_2(x)$$

故

$$(f(x),g(x)h(x))=1$$

例 5 证明：如果$(f(x), g(x))=1$，则 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$

证明: 因为$(f(x), g(x))=1$, 则有$u_1(x), v_1(x)$ 使得

$$1=f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)$$
$$=f(x)u_1(x)+(f(x)+g(x))v_1(x)-f(x)v_1(x)$$
$$=f(x)(u_1(x)-v_1(x))+(f(x)+g(x))v_1(x)$$

故 $(f(x), f(x)+g(x))=1$,

同理 $(g(x), f(x)+g(x))=1$

由例 4 的结论可知

$(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$。

例 6 已知m, n, p是非负整数，证明：

$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$能被x^2+x+1整除。

证明：设$\omega_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

则ω_1,ω_2为x^2+x+1的根，易知$\omega_1^{\ 3}=\omega_2^{\ 3}=1$，

从而

$$\omega_1^{\ 3m}+\omega_1^{\ 3n+1}+\omega_1^{\ 3p+2}=1+\omega_1+\omega_1^{\ 2}=0,$$

$$\omega_2^{\ 3m}+\omega_2^{\ 3n+1}+\omega_2^{\ 3p+2}=1+\omega_2+\omega_2^{\ 2}=0$$

所以 $x-\omega_1 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,

$x-\omega_2 \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$

因为 $(x-\omega_1, x-\omega_2)=1$,

所以

$$x^2+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2) \mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}。$$

注意：证明时利用了 3 次单位根及整除的性质。

例 7 （北京大学，2002）设 $f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$，证明：对任意的非负整数$n$，$(x^2+x+1, f_n(x))=1$

证明：反证法

若$(x^2+x+1, f_n(x)) \neq 1$，则存在多项式$x-a$，使$x-a \mid x^2+x+1, x-a \mid f_n(x)$

于是 $a^2+a+1=0, f_n(a)=0$。

即a是三次单位根，$a^3=1$。

$$f_n(x)=a^{n+2}-(a+1)^{2n+1}=a^{n+2}-(-a^2)^{2n+1}$$

$$=a^{n+2}+a^{4n+2}=a^{n+2}(1+a^{3n})=2a^{n+2}\neq 0$$，矛盾。

因此$(x^2+x+1, f_n(x))=1$。

注意：把所讨论的问题归结为方程根的讨论，利用三次单位根的性质获得了结论。本题也可直接证明。

例 8 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，n为正整数。

证明：如果 $f^n(x) \mid g^n(x)$，则 $f(x) \mid g(x)$

证明：应用多项式的标准分解式，设

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_m^{r_m}(x)$$

$$g(x) = bp_1^{s_1}(x)p_2^{s_2}(x)\cdots p_m^{s_m}(x)$$

其中 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ 是互不相同的首系数为1的不可约多项式，$a, b \in P$，

$r_i, s_i (i=1,2,\cdots,m)$ 是非负整数。

$$f^n(x) = a^n p_1^{nr_1}(x) p_2^{nr_2}(x) \cdots p_m^{nr_m}(x)$$

$$g^n(x) = b^n p_1^{ns_1}(x) p_2^{ns_2}(x) \cdots p_m^{ns_m}(x)$$

如果 $f^n(x) \mid g^n(x)$，则

$nr_i \le ns_i (i=1,2,\cdots,m)$。

于是 $r_i \le s_i (i=1,2,\cdots,m)$，从而 $f(x) \mid g(x)$

注意：本题应用多项式的标准分解式来证，十分简捷。多项式的唯一分解定理与多项式的标准分解式虽然没有给出具体的一个多项式的因式分解，但具有重要的理论意义，是证明有关多项式性质的有利工具。

例 9 求多项式

$f(x)=x^4-5x^3+11x^2-16x+12$的有理根。

解：$f(x)$为首项系数为1的整系数多项式，故它的有理根都是整根，且都是常数项的因子。常数项12的因子为$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$，因为$f(1)=3, f(-1)=45$，所以1与$-1$都不是$f(x)$的有理根。用综合除法可以看出只有2是$f(x)$的有理根，而且是2重根。

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -5 & 11 & -16 & 12 \\
  &   & 2 & -6 & 10 & -12 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 5 & -6 & 0 \\
  &   & 2 & -2 & 6 & \\
\hline
2 & 1 & -1 & 3 & 0 & \\
  &   & 2 & 2 & & \\
\hline
  & 1 & 1 & 5 \neq 0 & & \\
\end{array}
$$

又 $f(x)=(x-2)^2(x^2-x+3)$，

而且

$$
\begin{array}{r|rrl}
3 & 1 & -1 & 3 \\
 & & 3 & 6 \\
\hline
 & 1 & 2 & 9 \neq 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrl}
-3 & 1 & -1 & 3 \\
 & & -3 & 12 \\
\hline
 & 1 & -4 & 15 \neq 0
\end{array}
$$

所以$-2,\pm3$都不是$f(x)$的根，同理$\pm4,\pm6,\pm12$也都不是$f(x)$的根。

注意：求有理根时，首先判定可能是有理根的范围是$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$，但它们是不是有理根，需要进行判断，判断时用综合除法，这一点应特别强调。

例 10 判别多项式

$$f(x)=x^4-x^3+3x^2-7x+10$$

在有理数数域上是否可约。

解：令$x=y+1$，则

$$\varphi(y)=f(y+1)=y^4+3y^3+6y^2+6$$

取$p=3$，则由艾森斯坦因判别法知，

$\varphi(y)$在有理数域上不可约，从而知

$f(x)=\varphi(x-1)$在有理数域上也不可约。

注意:直接不能用艾森斯坦因判别法，但经过变换$x=y+1$，则可化为应用艾森斯坦因判别法。这是判别整系数多项式不可约的一个常见方法。注意所用变换应是可逆的 ，这样，原多项式的可约性与变换后的多项式的可约性相同