第三章 行列式

精选例题解析

例 1 写出四级行列式中所有带负号且包含因子a_{23}项。

解 四级行列式中包含因子a_{23}项为$a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{23}a_{i_4 4}$，其中$i_1 i_2 i_4$是$1,3,4$的排列。$1,3,4$的排列共有六个，所以这样的项共有六个。把$1,3,4$的每个排列$i_1 i_2 i_4$代入使这些项具体化。

由于 $1324, 3124, 4123, 1423, 3421, 4321$ 中 $1324, 4123, 3421$ 是仅有的奇排列，所以四级行列式中带负号且含有因子 a_{23} 的项是 $a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$，$a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}$，$a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$.

例 2 计算4级行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 化三角法：先将 1, 3 两列对换，得

$$D_4 = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

例 3 计算n级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a\cdots a & a \\ a & x & a\cdots a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a & a & a\cdots x & a \\ a & a & a\cdots a & x \end{vmatrix}$$

解法 1　三角化法

将第 1 行乘以—1 加到其它各行上，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a \cdots & a & a \\ a-x & x-a & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a-x & 0 & 0 \cdots & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}
$$

$$
= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}
$$

解法 2 加边法

当$x \neq a$时,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & a\cdots a & a \\ 0 & x & a & a\cdots a & a \\ 0 & a & x & a\cdots a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots \\ 0 & a & a & a\cdots a & x \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & a & a & a \cdots a & a \\
-1 & x-a & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\
-1 & 0 & x-a & 0 \cdots 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\
-1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & x-a
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 + \dfrac{na}{x-a} & a & a & a \cdots & a & a \\
0 & x-a & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & x-a & 0 \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & x-a
\end{vmatrix}
$$

$$=(1+\frac{na}{x-a})(x-a)^n=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

当$x=a$时， $D_n=0$

解法 3 递推法

将D_n的最后一列看成是两个数的和，即

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a \cdots a & 0 + a \\ a & x & a \cdots a & 0 + a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots \\ a & a & a \cdots x & 0 + a \\ a & a & a \cdots a & (x-a) + a \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} x & a & a \cdots a & 0 \\ a & x & a \cdots a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a & a & a \cdots x & 0 \\ a & a & a \cdots a & (x-a) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & a \cdots a & a \\ a & x & a \cdots a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a & a & a \cdots x & a \\ a & a & a \cdots a & a \end{vmatrix}
$$

$$
= (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}
$$

由此得递推公式

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{n-1}$$

以此递推下去，得

$$D_n = (x-a)[(x-a)D_{n-2} + a(x-a)^{n-2}] + a(x-$$

$$= (x-a)^2 D_{n-2} + 2a(x-a)^{n-1}$$

$$= (x-a)^2[(x-a)D_{n-3} + a(x-a)^{n-3}] + 2a(x$$

$$= (x-a)^3 D_{n-3} + 3a(x-a)^{n-1}$$

$$= \cdots$$

$$= (x-a)^{n-1} D_1 + (n-1)a(x-a)$$

$$= (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$$

例 4 计算n级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z & 1+x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & 1+x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & 1+x \end{vmatrix},x=yz.$$

解 将行列式按第 1 行展开，得

$$D_n = (1+x)D_{n-1} - z\begin{vmatrix} 1+x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z & 1+x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & 1+x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & y \end{vmatrix}$$

$$= (1+x)D_{n-1} - zyD_{n-2}$$

$$= (1+x)D_{n-1} - xD_{n-2}$$

$$= D_{n-1} + x(D_{n-1} - D_{n-2})$$

于是得

$$D_n - D_{n-1} = x(D_{n-1} - D_{n-2}) = \cdots = x^{n-2}(D_2 - D_1) = x^n$$

从而有递推公式

$$D_n = x^n + D_{n-1} = x^n + x^{n-1} + D_{n-2} = \cdots$$

$$= x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + D_1$$

$$= x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + + x + 1$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, x \neq 1; \\ n + 1, x = 1. \end{cases}$$

例 5 计算n级行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

解 加边法

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x\cdots x \\ 0 & x+1 & x & x\cdots x \\ 0 & x & x+2 & x\cdots x \\ 0 & x & x & x+3\cdots x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x & x & x\cdots x+n \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & x & x & x & \cdots & x \\
-1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{i} & x & x & x \cdots x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots n \end{vmatrix} = n!(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{i})
$$

例 6 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos n\alpha$$

证明：用第二数学归纳法

当$n=2$时，

$$D_2=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$$结论成立。

假设对级数小于n的行列式，结论成立，则按第n行展开，得

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}$$

由假设

$$D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha=\cos[(n-1)\alpha-\alpha]$$

$$=\cos(\mathrm{n}-1)\alpha\cos\alpha+\sin(\mathrm{n}-1)\alpha\sin\alpha$$

代入前一个式子得

$$D_n=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha$$

$$-[\cos(n-1)\alpha\cos\alpha+\sin(n-1)\alpha\sin\alpha]$$

$$=\cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos n\alpha$$

故对一切自然数n都成立。

例 7 计算 4级行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$$

解 D_4不是范德蒙德行列式，但具有该行列式的特点，故可考虑构造5级的范德蒙德行列式，再利用范德蒙德行列式的结果，间接求出D_4。

构造 5 级范德蒙德行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

按第 5 列展开，得

$$D_5 = A_{15} + xA_{25} + x^2 A_{35} + x^3 A_{45} + x^4 A_{55}$$

其中x^3的系数为$A_{45} = (-1)^{4+5} D_4 = -D_4$

又利用范德蒙德行列式的结果得

$$D_5 = (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)$$

$$(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)$$

$$(d-c)[x^4 - (a+b+c+d)x^3 + \cdots]$$

其中x^3的系数为

$$-(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)$$

$$(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

所以

$$D_4=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)$$

$$(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

例 8 设 a_1，a_2，…，a_n 是数域 P 中互不相同数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是数域P中任一组给定的数，用克拉默法则证明：存在唯一的数域 P 上的多项式

$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$ 使

$$f(a_i)=b_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

证明 设所求多项式为

$$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$$

利用所给条件有

$$\begin{cases} a_1^{n-1}c_0 + a_1^{n-2}c_1 + \cdots + c_{n-1} = b_1, \\ a_2^{n-1}c_0 + a_2^{n-2}c_1 + \cdots + c_{n-1} = b_2, \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_n^{n-1}c_0 + a_n^{n-2}c_1 + \cdots + c_{n-1} = b_n. \end{cases}$$

由于它的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \cdots & a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_j - a_i) \neq 0$$

由克拉默法则，方程组有唯一解$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$，所以存在唯一多项式

$$f(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}$$

满足

$$f(a_i) = b_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

例 9 证明 平面上三条不同直线

$$ax+by+c=0,\ bx+cy+a=0,\ cx+ay+b=0 \quad (1)$$

相交于一点的充分必要条件是$a+b+c=0.$

证明：必要性 设三条直线交于(x_0, y_0)，

故$x=x_0, \mathrm{y}=y_0, \mathrm{z}=1$是齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ bx+cy+az=0 \\ cx+ay+bz=0 \end{cases} \qquad (1)'$$

的一组的非零解，所以系数行列式$D=0$，即

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$=0$$

因为a,b,c都是不相同的实数，

所以必有$a+b+c=0.$

充分性　若$a+b+c=0$.则由方程组（1）得

$$\begin{cases} ax+by=-c \\ bx+cy=-a \\ 0=0 \end{cases} \qquad (2)$$

证明方程组（2）有唯一解。

用反证法，设方程组（2）的解不唯一，则必有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac-b^2=0, ac=b^2\geq 0$$

因为

$$b=-(a+c)\Rightarrow ac=[-(a+c)]^2=a^2+2ac+c^2$$

$$\Rightarrow ac=-(a^2+c^2)\le 0\Rightarrow ac=0$$

不妨设$a=0$，则由$b^2=ac\Rightarrow b=0$；再由$a+b+c=0\Rightarrow c=0$，这与三条不同直线假设矛盾，故$ac-b^2\neq 0$，方程组（2）有唯一解，即方程组（1）有唯一解，亦即三条不同直线交于一点。

例 10 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$互不相同的数，证明：

下列线性方程组有唯一解，并求唯一解：

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=1 \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n=b^2 \\ \qquad\vdots \\ a_1^{n-1}x_1+a_2^{n-1}x_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b^{n-1} \end{cases}$$

证明：方程组系数行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\neq 0$$

所以方程组有唯一解。

由范德蒙德行列式的结果，唯一解为

$$x_i = \frac{\prod_{j \neq i} (\mathrm{b} - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}, \mathrm{i} = 1, 2, \cdots, n$$