第五章 矩 阵

2. 矩阵的运算

现在我们来定义矩阵的运算，它们可以认为是矩阵之间一些最基本的关系．下面要定义的运算是矩阵的加法、乘法、矩阵与数的乘法以及矩阵的转置．

为了确定起见，我们取定一个数域P，以下所讨论的矩阵全是由数域P中的数组成的．

1. 加法

定义 1 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

是两个$s\times n$矩阵，则矩阵

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}$$

称为**A**和**B**的和，记为

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}.$$

矩阵的加法就是矩阵对应的元素相加．当然，相加的矩阵必须要有相同的行数和列数．由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法，也就是数的加法，所以，不难验证，它有

结合律：$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$；

交换律：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记为O_{sm}，在不致引起含混的时候，可简单地记为O. 显然，对所有的$\mathbf{A}$，

$$\mathbf{A}+O=\mathbf{A}.$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵$\mathbf{A}$的**负矩阵**，记为$-\mathbf{A}$. 显然有

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathrm{O}.$$

矩阵的**减法**定义为

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$

例　在§1我们看到，某一种物资如果有s个产地，n个销地，那么一个调运方案就可表示为一个$s\times n$矩阵，矩阵中元素a_{ij}表示由产地A_i要运到销地B_j的这种物资的数量，比如说吨数．如果从这些产地还有另一种物资要运到这些销地．

那么，这种物资的调运方案也可表示为一个$s \times n$矩阵. 于是从产地到销地的总的运输量也表示为一个矩阵. 显然，这个矩阵就等于上面两个矩阵的和.

根据矩阵加法的定义应用关于向量组的秩的性质，很容易看出：

$$秩(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq 秩(\mathbf{A})+秩(\mathbf{B})$$

2. 乘法

在给出乘法定义之前，我们先看一个引出矩阵乘法的问题.

设x_1, x_2, x_3, x_4和y_1, y_2, y_3是两组变量，它们之间的关系为

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3. \end{cases} \tag{1}$$

又如z_1,z_2是第三组变量，它们与y_1,y_2,y_3的关系为

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2. \end{cases} \qquad (2)$$

由(1)，(2)不难看出x_1,x_2,x_3,x_4与z_1,z_2的关系：

$$x_i=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}y_k=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{2}b_{kj}z_j\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ik}b_{kj}z_j=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}z_j$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}\right)z_j\quad(i=1,2,3,4).\quad(3)$$

如果我们用

$$x_i = \sum_{j=1}^{2} c_{ij} z_j, (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (4)$$

来表示x_1, x_2, x_3, x_4与z_1, z_2的关系，比较 (3), (4), 就有

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}, (i = 1, 2, 3, 4 ;\ j = 1, 2). \quad (5)$$

用矩阵的表示法，我们可以说，如果矩阵

$$\mathbf{A}=\left(a_{ik}\right)_{43}, \quad \mathbf{B}=\left(b_{kj}\right)_{32}$$

分别表示变量x_1,x_2,x_3,x_4与y_1,y_2,y_3以及z_1,z_2之间的关系，那么表示x_1,x_2,x_3,x_4与z_1,z_2之间的关系的矩阵

$$\mathbf{C}=\left(c_{ij}\right)_{42}$$

就由公式(5)决定.

矩阵C称为矩阵A与B的乘积，记为

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$$

一般地，我们有：

定义 2 设

$$\mathbf{A}=\left(a_{ik}\right)_{sn},\quad \mathbf{B}=\left(b_{kj}\right)_{nm},$$

那么矩阵

$$\mathbf{C}=\left(c_{ij}\right)_{sm},$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad (6),$$

称为**A**与**B**的乘积，记为

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}.$$

由矩阵乘法的定义可以看出,矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$的乘积$\mathbf{C}$的第i行第j列的元素等于第一个矩阵$\mathbf{A}$的第i行与第二个矩阵$\mathbf{B}$的第j列的对应元素乘积的和.

当然，在乘积的定义中，我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相等.

例 1　设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

那么

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5 & 6 & 7\\ 10 & 2 & -6\\ -2 & 17 & 10\end{pmatrix}.$$

乘积的矩阵中各个元素是根据公式(6)得出的，例如，第二行第一列的元素10是矩阵**A**的第二行元素与矩阵**B**的第一列对应元素乘积之和：

$$(-1)\times 0+1\times 1+3\times 3+0\times(-1)=10.$$

其余可类似得到.

例 2　如果

$$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{sn}$$

是一线性方程组的系数矩阵，而

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

分别是未知量和常数项所成的$n\times 1$和$s\times 1$矩阵，那么线性方程组就可以写成矩阵的等式

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}.$$

例 3　在空间中作一坐标系的转轴. 设由坐标系(x_1,y_1,z_1)到(x_2,y_2,z_2)的坐标变换的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

如果令

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

那么坐标变换的公式可以写成

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X}_2.$$

如果再作一次坐标系的转轴，设由第二个坐标系(x_2,y_2,z_2)到第三个坐标系(x_3,y_3,z_3)的坐标变换公式为

$$\mathbf{X}_2=\mathbf{B}\mathbf{X}_3,$$

其中

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},\quad \mathbf{X}_3=\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

那么不难看出，由第一个坐标系到第三个坐标系的坐标变换的矩阵即为

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}.$$

矩阵的乘法适合结合律. 设

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)_{sn}, \quad \mathbf{B} = \left(b_{jk}\right)_{nm}, \quad \mathbf{C} = \left(c_{kl}\right)_{mr},$$

我们证明

$$\left(\mathbf{AB}\right)\mathbf{C} = \mathbf{A}\left(\mathbf{BC}\right).$$

令

$$\mathbf{V}=\mathbf{AB}=\left(v_{ik}\right)_{sm},\mathbf{W}=\mathbf{BC}=\left(w_{jl}\right)_{nr}$$

其中 $$v_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\quad\left(i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,m\right),$$

$$w_{jl}=\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kl},\left(j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,r\right).$$

因为

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{VC}$$

中$\mathbf{VC}$的第i行第l列元素为

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}, \quad (7),$$

而

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{AW}$$

中 $\mathbf{AW}$ 的第 i 行第 l 列元素为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_{jl}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk} c_{kl}\right)=\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kl}, \quad (8),$$

由于双重连加号可以交换次序，所以(7)与(8)的结果是一样的，这就证明了结合律.

但是，**矩阵的乘法不适合交换律**，即一般说来，

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

这是由于，一方面在乘积中要求第一个因子的列数等于第二个因子的行数，否则没有意义.

所以，当$\mathbf{AB}$有意义时，$\mathbf{BA}$不一定有意义.

另一方面即使**AB**与**BA**都有意义，它们的级数也不一定相等，因为乘积的行数等于第一个因子的行数，列数等于第二个因子的列数. 如上面例1中，**AB**是一3×3矩阵，而**BA**是一4×4矩阵. 即使相乘的矩阵都是$n\times n$矩阵，这时，**AB**与**BA**都有意义，而且都是$n\times n$矩阵，但它们也不一定相等.

例如，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

而

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

在这个例子中我们还看到，两个不为零的矩阵的乘积可以是零，这是矩阵乘法的一个特点。由此还得出矩阵乘法的消去律不成立。即当$\mathbf{AB}=\mathbf{A}C$时不一定有$\mathrm{B}=C$. 读者由上面的例子的启发可以举出类似的例子。

定义 3 主对角线上的元素全是1，其余元素全是0的$n \times n$矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为n级**单位矩阵**，记为$\mathbf{E}_n$，或者在不致引起含混的时候简单写为$\mathbf{E}$.

显然有

$$\mathbf{A}_{sn}\mathbf{E}_{n} = \mathbf{A}_{sn},$$

$$\mathbf{E}_{s}\mathbf{A}_{sn} = \mathbf{A}_{sn}.$$

矩阵的乘法和加法还适合分配律，即

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}, \qquad (9),$$

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}, \qquad (10).$$

这两个式子的证明留给读者自己来做.

应该指出，由于矩阵的乘法不适合交换律，所以(9)与(10)是两条不同的规律.

我们还可以定义矩阵的方幂. 设$\mathbf{A}$是一$n\times n$矩阵，定义

$$\begin{cases}\mathbf{A}^1=\mathbf{A},\\ \mathbf{A}^{k+1}=\mathbf{A}^k\mathbf{A}.\end{cases}$$

换句话说，$\mathbf{A}^k$就是k个$\mathbf{A}$连乘. 当然，方幂只能对行数与列数相等的矩阵来定义.

由乘法的结合律，不难证明

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l=\mathbf{A}^{k+l},$$

$$\left(\mathbf{A}^k\right)^l=\mathbf{A}^{kl},$$

这里k，l是任意正整数. 证明留给读者去做. 因为矩阵乘法不适合交换律，所以$(\mathbf{AB})^k$与$\mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$一般不相等.

3. 数量乘法

定义 4 矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{sn}$ 与数 k 的**数量乘积**，记为 $k\mathbf{A}$.

换句话说，用数k乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上k.

不难验证，数量乘积适合以下的规律：

$$(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A}, \qquad (11),$$

$$k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}, \qquad (12)$$

$$k(l\mathbf{A})=(kl)\mathbf{A}, \qquad (13)$$

$$1\mathbf{A}=\mathbf{A}, \qquad (14),$$

$$k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B}), \qquad (15).$$

我们只证明等式(15)，其余留给读者证明. 设

$$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{sn}, \quad \mathbf{B}=\left(b_{jt}\right)_{nm},$$

用(i,t)表示第i行第t元列交叉处的位置元素。在$k(\mathbf{AB})$，$(k\mathbf{A})\mathbf{B}$，$\mathbf{A}(k\mathbf{B})$中, (i,t)的元素依次为

$$k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jt},$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(ka_{ij}\right)b_{jt}=k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jt},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(kb_{jt}\right) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jt}.$$

显然它们是一样的，这就证明了等式(15).

矩阵

$$k\mathbf{E} = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

通常称为**数量矩阵**.

作为(15)的特殊情形，如果$\mathbf{A}$是一$n\times n$矩阵，那么有

$$k\mathbf{A}=(k\mathbf{E})\mathbf{A}=\mathbf{A}(k\mathbf{E}).$$

这个式子说明，数量矩阵与所有的$n\times n$矩阵作乘法是可交换的.

可以证明：如果一个n级矩阵与所有的n级矩阵作乘法是可交换的，那么这个矩阵一定是数量矩阵（参看习题7）.

再有，

$$k\mathbf{E} + l\mathbf{E} = (k + l)\mathbf{E},$$

$$(k\mathbf{E})(l\mathbf{E}) = (kl)\mathbf{E},$$

这就是说，数量矩阵的加法与乘法完全归结为数的加法与乘法.

4. 转置

把一矩阵$\mathbf{A}$的行列互换，所得到的矩阵称为$\mathbf{A}$的转置，记为$\mathbf{A}'$（很多书上也记为$\mathbf{A}^T$）.

可确切地定义如下：

定义 5 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

所谓**A**的**转置**就是指矩阵

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

显然，$s \times n$矩阵的转置是$n \times s$矩阵.

矩阵的转置适合以下的规律：

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}, \qquad (16),$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}'+\mathbf{B}', \qquad (17)$$

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}', \qquad (18)$$

$$(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}', \qquad (19)$$

(16)表示两次转置就还原，这是显然的.

(17), (19)也很容易验证. 现在来看一下(18).

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{AB}$中(i,j)的元素为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

所以$(\mathbf{AB})'$中(i,j)的元素就是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} \qquad (20).$$

其次，$\mathbf{B}'$中(i,k)的元素是b_{ki}，$\mathbf{A}'$中(k,j)的元素是a_{jk}，因之，$\mathbf{B}'\mathbf{A}'$中(i,j)的元素即为

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} \qquad (21)$$

比较(20)，(21)即得(18).

例　　设

$$\mathbf{A}=\left(1,-1,2\right),\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\mathbf{AB}=\left(1,-1,2\right)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\left(9,2,-1\right),$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}'\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(9, 2, -1\right)' = \left(\mathbf{AB}\right)'$$

3　矩阵乘积的行列式与秩

在这一节我们来看一下矩阵乘积的行列式与秩和它的因子的行列式与秩的关系.

关于乘积的行列式有：

定理 1　设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 是数域 P 上的两个 $n\times n$ 矩阵，那么

$$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}| \qquad (1)$$

即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

证明　这是第二章第八节中已经证明了的结论. ▌

用数学归纳法，定理1不难推广到多个因子的情形，即有

推论 1 设$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_m$是数域$P$上的$n\times n$矩阵，于是$|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_m| = |\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\cdots|\mathbf{A}_m|$.

定义 6 数域P上的$n\times n$矩阵$\mathbf{A}$称为非退化的，如果$|\mathbf{A}|\neq 0$；否则称为退化的.

显然，一$n\times n$矩阵是非退化的充分必要条件是它的秩等于n.

从定理1，立刻推出：

推论 2 设**A**，**B**是数域P上$n\times n$矩阵，矩阵**AB**为退化的充分必要条件是**A**, **B**中至少有一个是退化的. ▌

关于矩阵乘积的秩，我们有：

定理 2 设$\mathbf{A}$是数域P上的$n\times m$矩阵，$\mathbf{B}$是数域P上$m\times s$矩阵，于是

$$秩(\mathbf{AB})\leq \min[秩(\mathbf{A}),\ 秩(\mathbf{B})] \quad (2)$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

证明 为了证明(2)，只需要证明秩$(\mathbf{AB})\leq$秩$(\mathbf{A})$，同时秩$(\mathbf{AB})\leq$秩$(\mathbf{B})$.

现在来分别证明这两个不等式.

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{B}_1$，$\mathbf{B}_2$，…，$\mathbf{B}_m$表示$\mathbf{B}$的行向量，$\mathbf{C}_1$，$\mathbf{C}_2$，…，$\mathbf{C}_n$表示$\mathbf{AB}$的行向量. 由计算可知，$\mathbf{C}_i$的第j个分量和$a_{i1}\mathbf{B}_1+a_{i2}\mathbf{B}_2+\cdots+a_{im}\mathbf{B}_m$的第$j$个分量都等于$\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$，因而

$$\mathbf{C}_i=a_{i1}\mathbf{B}_1+a_{i2}\mathbf{B}_2+\cdots+a_{im}\mathbf{B}_m,(i=1,2,\cdots,n)$$

即矩阵$\mathbf{AB}$的行向量组$\mathbf{C}_1$，$\mathbf{C}_2$，…，$\mathbf{C}_n$可经$\mathbf{B}$的行向量组线性表出．所以$\mathbf{AB}$的秩不能超过$\mathbf{B}$的秩（参见第三章习题12），也就是说，

$$秩(\mathbf{AB}) \le 秩(\mathbf{B}).$$

同样，令$\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，…，$\mathbf{A}_m$表示$\mathbf{A}$的列向量，$\mathbf{D}_1$，$\mathbf{D}_2$，…，$\mathbf{D}_s$表示$\mathbf{AB}$的列向量．由计算可知，

$$\mathbf{D}_i = b_{1i}\mathbf{A}_1 + b_{2i}\mathbf{A}_2 + \cdots + b_{mi}\mathbf{A}_m, (i = 1, 2, \cdots, \mathrm{s})$$

这个式子表明，矩阵**AB**的列向量组可以经矩阵**A**的列向量组线性表出，因而前者的秩不可能超过后者的秩，这就是说，

$$\text{秩}(\mathbf{AB})\le\text{秩}(\mathbf{A}).\quad \blacksquare$$

用数学归纳法，定理2不难推广到多个因子的情形，即有

推论 如果 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_t$，那么

$$\text{秩}(\mathbf{A})\le\min_{1\le j\le t}\text{秩}(\mathbf{A}_j).\ \blacksquare$$

4. 矩阵的逆

在§2我们看到，矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算. 矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？这就是本节所要讨论的问题.

这一节讨论的矩阵，如不特殊说明，都是 $n \times n$ 矩阵. 我们知道，对于任意的 n 级方阵 $\mathbf{A}$ 都有

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A},$$

这里 $\mathbf{E}$ 是 n 级单位矩阵.

因之，从乘法的角度来看，n级单位矩阵在n级方阵中的地位类似于1在复数中的地位. 一个复数$a \neq 0$的倒数a^{-1}可以用等式

$$aa^{-1}=1$$

来刻画，相仿地，我们引入：

定义 7　n级方阵$\mathbf{A}$称为可逆的，如果有n级方阵$\mathbf{B}$，使得

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E} \qquad (1)$$

这里$\mathbf{E}$是n级单位矩阵.

首先我们指出，由于矩阵的乘法规则，只有方阵才能满足(1)（读者自己证明）．其次，对于任意的矩阵$\mathbf{A}$，适合等式(1)的矩阵$\mathbf{B}$是唯一的（如果有的话）．

事实上，假设$\mathbf{B}_1$，$\mathbf{B}_2$是两个适合(1)的矩阵，就有

$$\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_1\mathbf{E}=\mathbf{B}_1\left(\mathbf{AB}_2\right)=\left(\mathbf{B}_1\mathbf{A}\right)\mathbf{B}_2=\mathbf{EB}_2=\mathbf{B}_2.$$

定义 8 如果矩阵$\mathbf{B}$适合(1)，那么$\mathbf{B}$就称为$\mathbf{A}$的逆矩阵，记为$\mathbf{A}^{-1}$.

下面要解决的问题是：在什么条件下矩阵$\mathbf{A}$是可逆的？如果$\mathbf{A}$可逆，怎样求$\mathbf{A}^{-1}$？

定义 9　设$\mathbf{A}_{ij}$是矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中元素a_{ij}的代数余子式，

矩阵

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{ni} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{A}_{2n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

称为**A**的**伴随矩阵**.

由行列式按一行（列）展开的公式立即得出：

$$\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} = d\mathbf{E} \quad (2),$$

其中$d = |\mathbf{A}|$.

如果$d=|\mathbf{A}|\neq 0$，那么有(2)得

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{d}\mathbf{A}^*\right)=\left(\frac{1}{d}\mathbf{A}^*\right)\mathbf{A}=\mathbf{E} \qquad (3)$$

定理 3 矩阵$\mathbf{A}$是可逆的充分必要条件是$\mathbf{A}$非退化，而

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{d}\mathbf{A}^* \quad \left(d=|\mathbf{A}|\neq 0\right).$$

证明 当$d=|\mathbf{A}|\neq 0$，由(3)可知，$\mathbf{A}$可逆，且

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{d}\mathbf{A}^{*} \qquad (4).$$

反过来，如果$\mathbf{A}$可逆，那么有$\mathbf{A}^{-1}$使

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}.$$

两边取行列式，得

$$|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{E}|=1 \qquad (5),$$

因而$|\mathbf{A}|\neq 0$，即$\mathbf{A}$非退化. ▌

根据定理3容易看出，对于n级方阵$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，如果

$$\mathbf{AB}=\mathbf{E},$$

那么$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$就都是可逆的并且它们互为逆矩阵.

定理3不但给出了一矩阵可逆的条件，同时也给出了求逆矩阵的公式(4). 按这个公式来求逆矩阵，计算量一般是非常大的. 在以后我们将给出另一种求法.

由(5)可以看出，如果$|\mathbf{A}| = d \neq 0$，那么

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = d^{-1}.$$

推论　如果矩阵$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$可逆，那么$\mathbf{A}'$与$\mathbf{AB}$也可逆，且

$$(\mathbf{A}')^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)',$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

证明　由定理即得推论的前一半，现在来证后一半. 由

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$$

两边取转置，有

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)'\mathbf{A}'=\mathbf{A}'\left(\mathbf{A}^{-1}\right)'=\mathbf{E}'=\mathbf{E},$$

因之

$$\left(\mathbf{A}'\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)'.$$

由

$$(\mathbf{AB})\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)=\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)(\mathbf{AB})=\mathbf{E}$$

即得

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \quad \blacksquare$$

利用矩阵的逆，可以给出克拉默法则的另一种推导法. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

可以写成（§2例2）

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \qquad (6)$$

如果$|\mathbf{A}| \neq 0$，那么$\mathbf{A}$可逆. 用

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

代入(6)，得恒等式$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right) = \mathbf{B}$，这就是说$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$是一个解.

如果

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}$$

是(6)的一个解，那么由

$$\mathbf{AC} = \mathbf{B}$$

得

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AC}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

即

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

这就是说，解$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$是唯一的. 用$\mathbf{A}^{-1}$的公式(4)代入，乘出来就是克拉默法则中给出的公式.

联系到可逆矩阵，关于矩阵乘积的秩有：

定理 4 $\mathbf{A}$是一个$s\times n$矩阵，如果$\mathbf{P}$是$s\times s$可逆矩阵，$\mathbf{Q}$是$n\times n$可逆矩阵，那么

$$秩(\mathbf{A})=秩(\mathbf{PA})=秩(\mathbf{AQ}).$$

证明 令

$$\mathbf{B}=\mathbf{PA},$$

由定理2，

$$秩(\mathbf{B})\leq秩(\mathbf{A});$$

但是由

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B},$$

又有

$$秩(\mathbf{A}) \leq 秩(\mathbf{B}).$$

所以

$$秩(\mathbf{A}) = 秩(\mathbf{B}) = 秩(\mathbf{PA}).$$

另一个等式可以同样的证明. ▌

5　矩阵的分块

这一节，我们来介绍一下在处理级数较高的矩阵时常用的方法，即矩阵的分块. 有时候，我们把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，就如矩阵是由数组成的一样. 特别在运算中，把这些小矩阵当作数一样来处理. 这就是所谓**矩阵的分块**.

为了说明这个方法，下面看一个例子． 在矩阵

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}$$

中， $\mathbf{E}_2$表示2级单位阵，而

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在矩阵

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_{12}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_{22}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

在计算**AB**时，把**A**，**B**都看成是由这些小矩阵组成的，即按2级矩阵来运算.

于是

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_2 & \mathbf{O}\\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_{12}+\mathbf{B}_{22}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

因之

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

不难验证，直接按4级矩阵乘积的定义来作，结果是一样的.

一般地说，设$\mathbf{A}=\left(a_{ik}\right)_{sn}$，$\mathbf{B}=\left(b_{kj}\right)_{nm}$，把$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$分成一些小矩阵：

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1l} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{t1} & \mathbf{A}_{t2} & \cdots & \mathbf{A}_{tl} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

$$
\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\
\mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{B}_{2r} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{B}_{l1} & \mathbf{B}_{l2} & \cdots & \mathbf{B}_{lr}
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad (2)
$$

其中每个$\mathbf{A}_{ij}$是$s_i \times n_j$小矩阵，每个$\mathbf{B}_{ij}$是$n_i \times m_j$小矩阵.

于是有

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{t1} & \mathbf{C}_{t2} & \cdots & \mathbf{C}_{tr} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (3)$$

其中

$$\mathbf{C}_{pq} = \mathbf{A}_{p1}\mathbf{B}_{1q} + \mathbf{A}_{p2}\mathbf{B}_{2q} + \cdots + \mathbf{A}_{pl}\mathbf{B}_{lq}$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \mathbf{A}_{pk}\mathbf{B}_{kq} \quad \left(p = 1,2,\cdots,t; q = 1,2,\cdots,r\right). \qquad (4)$$

这个结果由矩阵乘积的定义直接验证即得，就不详细说明了.

应该注意，在分块矩阵(1)，(2)中矩阵$\mathbf{A}$的列的分法必须与矩阵$\mathbf{B}$的行的分法一致.

以下会看到，分块乘法有许多方便之处. 常常在分块之后，矩阵间相互的关系看得更清楚.

实际上，在证明关于矩阵乘积的秩的定理时，我们已经用了矩阵分块的想法.

在那里，用$\mathbf{B}_1$，$\mathbf{B}_2$，…，$\mathbf{B}_m$表示$\mathbf{B}$的行向量，于是

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\\ \vdots\\ \mathbf{B}_m\end{pmatrix},$$

这就是$\mathbf{B}$的一种分块.

按分块相乘，就有

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B}_1+a_{12}\mathbf{B}_2+\cdots+a_{1m}\mathbf{B}_m \\ a_{21}\mathbf{B}_1+a_{22}\mathbf{B}_2+\cdots+a_{2m}\mathbf{B}_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\mathbf{B}_1+a_{n2}\mathbf{B}_2+\cdots+a_{nm}\mathbf{B}_m \end{pmatrix}$$

这个式子很容易看出**AB**的行向量是**B**的行向量的线性组合；将**AB**进行另一种分块乘法，从结果中可容易看出**AB**的列是**A**的列的线性组合（读者自己做一下）

作 为 另 一 个 例 子 ， 我 们 来 求 矩 阵

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵，

其中$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$分别是k级和r级的可逆矩阵, $\mathbf{C}$是$r\times k$矩阵，$\mathbf{O}$是$k\times r$零矩阵.

首先，因为

$$|\mathbf{D}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|,$$

所以当$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$可逆时，$\mathbf{D}$也可逆. 设

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{E}_k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_r \end{pmatrix}$$

这里$\mathbf{E}_k$，$\mathbf{E}_r$分别表示k级和r级单位矩阵.

乘出并比较等式两边，得

$$\begin{cases} \mathbf{AX}_{11} = \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{AX}_{12} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{CX}_{11} + \mathbf{BX}_{21} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{CX}_{12} + \mathbf{BX}_{22} = \mathbf{E}_r. \end{cases}$$

由第一、二式得

$$\mathbf{X}_{11} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{X}_{12} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O},$$

代入第四式，得

$$\mathbf{X}_{22} = \mathbf{B}^{-1},$$

代入第三式，得

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_{21} = -\mathbf{C}\mathbf{X}_{11} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{X}_{21} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}.$$

因此

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

特别地，当$\mathbf{C} = \mathbf{O}$时，有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

形式为

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_l \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中a_i是数$(i=1,2,\cdots,l)$，通常称为对角矩阵，

而形式为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{O} \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_l \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中$\mathbf{A}_i$是$n_i \times n_i$矩阵$(i=1,2,\cdots,l)$，通常称为**准对角矩阵**. 当然，准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情形.

对于有两个相同分块的准对角矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & & & \mathbf{O}\\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_l\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & & & \mathbf{O}\\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{B}_l\end{pmatrix},$$

如果它们相应的分块是同级的，那么显然有

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & & & \mathbf{O}\\ & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_l\mathbf{B}_l\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1 & & & \mathbf{O} \\ & \mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_l+\mathbf{B}_l \end{pmatrix}$$

它们还是准对角矩阵.

其次，如果$\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，…，$\mathbf{A}_l$都是可逆矩阵，那么

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{O} \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_l \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \mathbf{O} \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_l^{-1} \end{pmatrix}$$

6 初 等 矩 阵

这一节我们来建立矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系，并在这个基础上，给出用初等变换求逆矩阵的方法.

定义 10 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

显然，初等矩阵都是方阵，每个初等变换都有一个与之相应的初等矩阵． 互换矩阵$\mathbf{E}$的i行与j行的位置，得

$$
\mathbf{P}(i,\ j) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 0 & & & \cdots & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
& & & 1 & \cdots & & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

用数域P中非零数C乘E的i行，有

$$\mathbf{P}\left(i(c)\right)=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\ \text{行} \\ , \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

把矩阵$\mathbf{E}$的j行的k倍加到i行，有

$$\mathbf{P}\left(i,j\left(k\right)\right)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & i\text{列} & & j\text{列} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ j\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array},$$

同样可以得到与列变换相应的初等矩阵. 应该指出，对单位矩阵做一次初等列变换所得到的矩阵也包括在上面所列举的这三类矩阵之中. 譬如说，把$\mathbf{E}$的i列的k倍加到j列，我们仍然得到$\mathbf{P}\left(i,j\left(k\right)\right)$. 因之，这三类矩阵就是全部的初等矩阵.

利用矩阵乘法的定义，立刻可以得到

引理 对一个 $s\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 作一初等行变换就相当于在 $\mathbf{A}$ 的左边乘上相应的 $s\times s$ 初等矩阵；对 $\mathbf{A}$ 作一初等列变换就相当于在 $\mathbf{A}$ 的右边乘上相应的 $n\times n$ 的初等矩阵.

证明 我们只看行变换的情形，列变换的情形可同样证明.

令$\mathbf{B}=\left(b_{ij}\right)$为任意一个$s\times s$矩阵，$\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，$\cdots$，$\mathbf{A}_s$作为$\mathbf{A}$的行向量. 由矩阵的分块乘法，

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} b_{11}\mathbf{A}_1+b_{12}\mathbf{A}_2+\cdots+b_{1s}\mathbf{A}_s \\ b_{21}\mathbf{A}_1+b_{22}\mathbf{A}_2+\cdots+b_{2s}\mathbf{A}_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}\mathbf{A}_1+b_{s2}\mathbf{A}_2+\cdots+b_{ss}\mathbf{A}_s \end{pmatrix}$$

特别，令$\mathbf{B}=\mathbf{P}(i,j)$，得

$$\mathbf{P}(i,j)\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c}\mathbf{A}_1\\ \vdots\\ \mathbf{A}_j\\ \vdots\\ \mathbf{A}_i\\ \vdots\\ \mathbf{A}_s\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ i\ \text{行}\\ \\ j\ \text{行}\\ \\ \\ \end{array},$$

这相当于把$\mathbf{A}$的i行与j行互换. 令$\mathbf{B}=\mathbf{P}\big(i(c)\big)$，得

$$\mathbf{P}\big(i(c)\big)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \vdots\\ c\mathbf{A}_i\\ \vdots\\ \mathbf{A}_s\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\ 行\\ \\ \\ \end{matrix}$$

这相当于用c乘$\mathbf{A}$的i行.

令 $\mathbf{B}=\mathbf{P}(i,j(k))$，得

$$\mathbf{P}(i,j(k))\mathbf{A}=\left(\begin{array}{c}\mathbf{A}_1\\ \vdots\\ \mathbf{A}_i+k\mathbf{A}_j\\ \vdots\\ \mathbf{A}_j\\ \vdots\\ \mathbf{A}_s\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array},$$

这相当于把$\mathbf{A}$的j行的k倍加到i行. ∎

不难看出，初等矩阵都是可逆的，它们的逆矩阵还是初等矩阵. 事实上

$$\mathbf{P}(i,j)^{-1}=\mathbf{P}(i,j)，\ \mathbf{P}(i(c))^{-1}=\mathbf{P}\left(i\left(c^{-1}\right)\right),$$

$$\mathbf{P}(i,j(k))^{-1}=\mathbf{P}(i,j(-k)).$$

在第二章§5 我们看到，用初等行变换可以化简矩阵．如果同时用行与列的初等变换，那么矩阵还可以进一步化简．为了方便，我们引入：

定义 11 矩阵**A**与**B**称为是等价的，如果**B**可以由**A**经过一系列初等变换得到．

等价是矩阵间的一种关系. 不难证明，它具有：

(1) 反身性：A与A等价；

(2) 对称性：若A与B等价，则B与A等价；

(3) 传递性：若A与B等价，B与X等价，则A与X等价。

定理 5 任意一个$s\times n$矩阵**A**都与一形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵等价，它称为矩阵**A**的标准形，主对角线上1的个数等于**A**的秩（1的个数可以是零）

证明 如果$\mathbf{A}=\mathbf{O}$，那么它已经是标准形了．以下无妨假定$\mathbf{A}\neq\mathbf{O}$．经过初等变换，**A**一定可以变成一左上角元素不为零的矩阵．当$a_{11}\neq 0$时，把其余的行减去第一行的$a_{11}^{-1}a_{i1}(i=1,2,\cdots,s)$倍，

其余的列减去第一列的 $a_{11}^{-1}a_{1j}\,(i=2,3,\cdots,n)$ 倍. 然后，用 a_{11}^{-1} 乘第一行，$\mathbf{A}$ 就变成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}_1$ 是一个 $(s-1)\times(n-1)$ 的矩阵. 对 $\mathbf{A}_1$ 再重复以上的步骤. 这样下去就可得出所要的标准形.

显然，标准形矩阵的秩就等于它主对角线上1的个数．而初等变换不改变矩阵的秩，所以1的个数也就是矩阵$\mathbf{A}$的秩．▌

例 1 用初等变换将下列矩阵化为标准形，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&3&2&5\\2&2&6&7\\2&4&5&6\end{pmatrix}$$

解

$$\mathbf{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据引理，对一矩阵作初等变换就相当于用相应的初等矩阵去乘这个矩阵. 因之，矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 等价的充分必要条件是有初等矩阵 $\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_l,\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2\cdots,\mathbf{Q}_t$ 使

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{P}_l\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\cdots\mathbf{Q}_t. \qquad (1)$$

n级可逆矩阵的秩为n，所以可逆矩阵的标准形为单位矩阵；反过来显然也是对的. 由(1)即得

定理 6 n级矩阵$\mathbf{A}$为可逆的充分必要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积：

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_m. \qquad (2). \quad \blacksquare$$

由此即得

推论 1 两个$s\times n$矩阵$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$等价的充分必要条件为，存在可逆的s级矩阵$\mathbf{P}$，与可逆的n级矩阵$\mathbf{Q}$使

$$\mathbf{A}=\mathbf{PBQ}. \quad \blacksquare$$

把(2)改写一下，有

$$\mathbf{Q}_m^{-1}\cdots\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}. \qquad (3).$$

因为初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，同时在矩阵A的左边乘初等矩阵就相当于对A作初等行变换，所以(3)说明了

推论 2 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵. ∎

以上的讨论提供了一个求逆矩阵的方法. 设$\mathbf{A}$是一n级可逆矩阵. 由推论2，有一系列的初等矩阵$\mathbf{P}_1,\cdots,\mathbf{P}_m$使

$$\mathbf{P}_m\cdots\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{E}, \qquad (4),$$

由(4)即得

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{P}_m\cdots\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_m\cdots\mathbf{P}_1\mathbf{E}. \qquad (5)$$

$(4), (5)$两个式子说明，如果用一系列初等行变换把可逆矩阵$\mathbf{A}$化成单位矩阵，那么同样地用这一系列初等行变换去化单位矩阵，就得到$\mathbf{A}^{-1}$.

把$\mathbf{A}$，$\mathbf{E}$这两个$n \times n$矩阵凑在一起，作成一个$n \times 2n$矩阵

$$(\mathbf{A} \ \ \mathbf{E}),$$

按矩阵的分块乘法，$(4), (5)$可以合并写成

$$\mathbf{P}_m\cdots\mathbf{P}_1(\mathbf{A}\ \ \mathbf{E})=(\mathbf{P}_m\cdots\mathbf{P}_1\mathbf{A}\ \ \mathbf{P}_m\cdots\mathbf{P}_1\mathbf{E})=\left(\mathbf{E}\ \ \mathbf{A}^{-1}\right)\quad(6)$$

(6)式提供了一个具体求逆矩阵的方法. 作 $n\times 2n$ 矩阵 $(\mathbf{A}\ \ \mathbf{E})$，用初等行变换把它的左边一半化成 $\mathbf{E}$，这时，右边一半就是 $\mathbf{A}^{-1}$.

例 2 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求$\mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

当然，同样可以证明，可逆矩阵也能用初等列变换化成单位矩阵，这就给出了用初等列变换求逆矩阵的方法.

7 分块乘法的初等变换及应用举例

将分块乘法与初等变换结合就成为矩阵运算中极端重要的手段.

现将某个单位矩阵如下进行分块:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}.$$

对它进行两行（列）对换；某一行（列）左乘（右乘）一个矩阵P；一行（列）加上另一行（列）的P（矩阵）倍数，就可得到如下类型的一些矩阵：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{P} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{P} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}.$$

和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的变换：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E}_m \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{PA} & \mathbf{PB} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{P} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}+\mathbf{PA} & \mathbf{D}+\mathbf{PB} \end{pmatrix} \qquad (3).$$

同样，用它们右乘任一矩阵，进行分块乘法时也有相应的结果，我们不写出了.

在(3)中，适当选择$\mathbf{P}$，可使$\mathbf{C}+\mathbf{P}\mathbf{A}=\mathbf{O}$. 例如$\mathbf{A}$可逆时，选$\mathbf{P}=-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$，则$\mathbf{C}+\mathbf{P}\mathbf{A}=\mathbf{O}$. 于是(3)的右端成为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

这种形状的矩阵在求行列式、逆矩阵和解决其它问题时是比较方便的，因此(3)中的运算非常有用.

下面举些例子看看这些公式的应用.

例 1

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}$，$\mathbf{D}$可逆，求$\mathbf{T}^{-1}$.

由

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & \mathbf{O} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix},$$

易知

$$\mathbf{T}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_m & \mathbf{O}\\ -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\end{pmatrix}.$$

例 2

$$\mathbf{T}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix},$$

设$\mathbf{T}_1$可逆，$\mathbf{D}$可逆，试证$\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1}$存在，并求$\mathbf{T}_1^{-1}$.

由

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_m & -\mathbf{BD}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}.$$

而右端仍可逆，故$\left(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1}$存在.

再由例1，知

$$\mathbf{T}_1^{-1}=\begin{pmatrix}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} & \mathbf{O}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_m & -\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} & -\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} & \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\left(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}+\mathbf{D}^{-}\end{pmatrix}$$

例 3　证明行列式的乘积公式$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

作

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \qquad (4).$$

设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为$n\times n$矩阵，作

$$\mathbf{P}_{ij}=\begin{pmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{E}_{ij} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n \end{pmatrix},$$

$i,j=1,2,\cdots,n$, 这里$\mathbf{E}_{ij}$为$n\times n$矩阵, 除了第i行第j列

元素为a_{ij}外，其他元素皆为零．则由初等矩阵与初等变换的关系，易得右端为

$$\mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{12}\cdots\mathbf{P}_{1n}\cdots\mathbf{P}_{n1}\cdots\mathbf{P}_{nn}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_n & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_n & \mathbf{A}\\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_n\end{pmatrix}$$

又由$\mathbf{P}_{ij}$所对应的初等变换是某行加上另外一行的倍数，它不改变行列式的值，故

$$\left|\begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{pmatrix}\right| = \left|\mathbf{P}_{11}\cdots\mathbf{P}_{nn}\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

但(4)的右端可经n个两列对换变成

$$\begin{pmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{E} \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{E} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n |\mathbf{AB}||-\mathbf{E}| = |\mathbf{AB}|.$$

这就证明了

$$|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{AB}|.$$

例 4 设 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,\ 1\leq k\leq n,$$

则有下三角形矩阵$\mathbf{B}_{n\times n}$使

$$\mathbf{BA}=\text{上三角形矩阵}.$$

证明 对n作归纳法. 当$n=1$时，一阶矩阵既是上三角形又是下三角形. 故命题自然成立.

设对$n-1$命题为真，我们来看

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

它仍满足命题中所设的条件. 由归纳法假设，有下三角形矩阵$(\mathbf{B}_1)_{(n-1)\times(n-1)}$满足

$\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1$=上三角形矩阵.

对A作如下分块，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\alpha\mathbf{A}_1^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \beta \\ \mathbf{O} & -\alpha\mathbf{A}_1^{-1}\beta+a_{nn}\end{pmatrix}$$

再作

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \beta \\ \mathbf{O} & -\alpha \mathbf{A}_1^{-1}\beta + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1\beta \\ \mathbf{O} & -\alpha \mathbf{A}_1^{-1}\beta + a_{nn} \end{pmatrix}$$

.

这时矩阵已成为上三角形了.

将两次乘法结合起来就得到：

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{O}\\ -\alpha\mathbf{A}_1^{-1} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{O}\\ -\alpha\mathbf{A}_1^{-1} & 1\end{pmatrix}.$$

此即所要求的下三角矩阵.

精选例题解析

例 1 已知$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$,

求（1）$|-2B|$, (2) $AB-BA$。

解 （1）

$$|-2B| = \left| -2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

注意下面的计算是错误的

$$|-2B| = -2|\mathrm{B}| = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$AB - BA$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 设A,B,C都是n阶方阵。试问下列等式是否成立？若成立，说明理由；若不成立，举例说明。

（1）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$；

（2）$AB = AC, A \neq 0$，则$B = C$;

（3）$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;

（4）$A^2 = E$，则$A = E$,或$A = -E$;

（5）$|-A| = -|A|$;

（6）$|A+B|=|A|+|B|$;

（7）$A\neq 0$，则$|A|\neq 0$.

解 矩阵运算中，由于矩阵的乘法不满足交换律，所以（1），（3）都是错误的。（1）应改为

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$。

（3）$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

又矩阵的乘法运算中，消去律不成立。例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

则$AB=AC=\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$，但$B\neq C$，所以（2）错误。

（4）因为$A^2=E$，即$(A+E)(A-E)=0$

不能推出$A+E=0$或$A-E=0$。即不能得$A=E$或

$A=-E$。例如$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，有$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$，但

$A\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$且$A\neq\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=-E$，所以结论错误。

（5）错误。因为当n为偶数时，

$|-A|=(-1)^n|A|=|A|\neq-|A|$，

例如$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,则$|A|=1\neq-|A|=-1$。所以结论错误。

（6）错误。例如$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，则

$|A+B|=0$,而$|A|=1$,$|B|=1$，所以$|A|+|B|=2$，所以$|A+B|\neq|A|+|B|$。

（7）错误。例如$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0$，但$|A|=0$。

例 3 设$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$，且满足$AX=A+2X$，求矩阵$X$。

解　由 $AX = A + 2X$， 有 $(A-2E)\mathrm{X} = \mathrm{A}$， 而

$$A-2E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$，且 $|A-2E| = -1 \neq 0$，所以

$A-2E$可逆，有逆阵存在。于是

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

例 4 求矩阵的逆阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

解　用伴随矩阵与初等行变换求逆阵。

（1）伴随矩阵法

$|A| = -2 \neq 0$,所以A可逆。$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$。

因为

$$A_{11} = 1, A_{12} = -1, A_{13} = 0,$$

$$A_{21} = 3, A_{22} = -1, A_{23} = -2,$$

$$A_{31} = 5, A_{32} = -1, A_{33} = -2$$

所以

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

（2）初等行变换法

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

例 5 已知n阶方阵A，满足$A^3=3A(A-E)$，

证明：$E-A$可逆，并求$(E-A)^{-1}$。

证明 因为$A^3=3A(A-E)$，得

$$-3A+3A^2-A^3=0,$$

两边加E，得$E-3A+3A^2-A^3=E$，

整理得$(E-A)^3=(E-A)(E-A)^2=E$

所以$E-A$可逆，且$(E-A)^{-1}=(E-A)^2$。

例 6 证明：任一n阶方阵都可以表示为一个对称矩阵和反对称矩阵的和，且表示唯一。

证明 设$A=B+C$，其中B为对称矩阵，C为反对称矩阵，$A=B+C$两边取转置，得

$$A^{'}=B^{'}+C^{'}=B-C$$

解矩阵方程组

$$\begin{cases} A=B+C \\ A^{'}=B-C \end{cases},$$

得 $B=\dfrac{A+A^{'}}{2}$， $C=\dfrac{A-A^{'}}{2}$，

$B^{'}=(\dfrac{A+A^{'}}{2})^{'}=\dfrac{A+A^{'}}{2}=B$，$B$为对称矩阵，

$C^{'}=(\dfrac{A-A^{'}}{2})=\dfrac{A^{'}-A}{2}=-C$，$C$为反对称矩阵。

再证唯一性：若另有$A=B_1+C_1$，其中

$$B_1^{'}=B_1,\quad C_1^{'}=-C_1,$$

则$A^{'}=(B_1+C_1)^{'}=B_1^{'}+C_1^{'}=B_1-C_1$，

于是有$A+A^{'}=2B_1,\quad A-A^{'}=2C_1$，

所以$B_1=\dfrac{A+A^{'}}{2},\quad C_1=\dfrac{A-A^{'}}{2}$，即有

$B=B_1,\quad C=C_1$，唯一性得证。

例 7 设 A,B 都是 n 阶方阵，如果 $AB=0$，证明

$$rank(A)+rank(B)\leq n。$$

证明 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 B 的列向量。由 $AB=0$，得 $A\beta_i=0,i=1,2,\cdots,n$，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是方程组 $AX=0$ 的解向量。

又方程组 $AX=0$ 的解向量组的秩为 $n-rank(A)$，所以有

$$rank(B)=rank(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\leq n-rank(A),$$

所以 $rank(A)+\mathrm{rank}(B)\leq n$。

例 8. 设A为n阶方阵，且$A^2=A$，证明

$$rank(A)+rank(A-E)=n。$$

证明 因为$A^2=A$，则$A^2-A=0$,即

$$A(A-E)=0.$$

由例 7 结论有

$$rank(A)+rank(A-E)\le n。$$

又因为

$$rank(A)+rank(A-E)=rank(A)+rank(E-A)$$

$$\geq rank(A+E-A)=rank(E)=n$$

所以

$$rank(A)+rank(A-E)\geq \mathrm{n},$$

于是有

$$rank(A)+rank(A-E)=n。$$