

数学课程目标的重新审视:理解的视角

● 巩子坤

摘 要:本文基于理解理论,重新审视了《义务教育数学课程标准(实验稿)》。实证证明,学生对有理数乘法意义的理解具有困难性和有限性。因而,课程目标应该具有层次性和适切性。数学课程标准不可笼统地说“理解有理数乘法意义,理解有理数乘法的运算”,要说明什么是有理数乘法的意义,何谓理解有理数乘法的意义,理解的水平层次是什么。

关键词:课程目标;理解;有理数乘法

一、研究的问题

有理数教学的要求是“在具体情境中,理解有理数及其运算的意义”,评价建议是“关注学生对有理数的意义、有理数运算法则的理解水平。对运算的评价重点应放在学生对算理的理解”^[1]。2000大纲(试用修订版)版教科书关于有理数的教学要求是“理解有理数的加、减、乘、除乘方的意义”,并指出“本章的主要难点是对有理数运算法则的理解,特别是对有理数乘法法则的理解”^[2]。如果我们进一步追问:什么是有理数运算的意义和算理?什么是理解有理数运算的意义和算理?理解有几个水平?大纲都没有明确地界说。通过本研究,我们试图回答这些问题。

二、研究的对象

我们选取山东省某市的两所城镇初级中学作为研究、调查的学校。这两所中学在当地的排名都比较好,位居1、5名,每所学校都有10个左右的平行班级。我们从这两所学校分别选取了成绩中等的7年级班级各1个(我们调查时,7年级的学生正好学习有理数乘法)。有关学生的调查、访谈,均在这两所学校进行。在对教师进行问卷调查时,我们又选取了一所中学,以便构成有效样本。

三、研究的方法

学生问卷调查内容如下(教师问卷调查的内容同学生):

说明下列各算式所表示的意义是什么。

问题1 $(-4) \times 7$

问题2 $6 \times (-5)$

问题3 $(-4) \times (-6)$

四、结果

(一)正确的理解

1.异号两数相乘

(1)用加法来解释

比如,学生S1: $(-4) \times 7$ 表示-4的7倍是多少。

S1:结果是-28。就是7个-4的和。

有的学生还提供了现实情境,比如,学生S3:考试的时候,错一道题扣5分,错6道题扣多少分?

T:请解释一下。

S3:扣5分记为-5,错了6道题,一共扣了30分,记为-30。不就是 $6 \times (-5) = -30$ 吗。

以上算式,都有一个正整数,这就可以迁移整数乘法意义:乘法是相同加数和的简便运算。事实上,在学生所使用的教材中,为了给学生提供一些可以抛锚的知识基础,介绍有理数乘法的时候,总是先从整数乘法意义出发,比如 $(-2) + (-2) + (-2) = (-2) \times 3 = -6$ 。因而,使用“倍”、“和”来解释是最自然不过的事情。就学生目前的认识水平而言,也是一种基本正确的解释。然而,严格地说来,由于有理数运算形式化的原因,乘法不能够再理解为“相同加数和的简便运算”了。

(2)用乘法来解释

比如,学生 S4: $6 \times (-5)$ 的意义是 6 与 -5 相乘的积是多少?

从表面上看,这种解释什么都没有说明问题,因为学生没有说明积是什么。但是,我们也应该看到,这绝不是一句废话,也不是玩文字游戏。如果不想交换过来,用 6 个 -5 的和来解释的话,这就是一个比较理想的回答。因为在有理数范围内,不可能像非负有理数那样,把乘法解释为“乘一个数就等于求这个数的几分之几是多少”。因而,只能够用近乎形式化的方法来解释。当然,上述回答也并非是完全正确的。正确的回答应该是:表示 6 与 -5 的积,积是 -30。调查中发现,学生对于结果是一目了然的:

T:积是多少?

S4:-30。

T:怎样得到的?

S4:用法则得到的。

T:你为什么这样解释?

S4:这道题和 $(-4) \times 7$ 不一样,我感觉到不好解释了。你总不能说是 6 的 -5 倍,或者 -5 个 6 的和吧。

这事实上反映了乘法意义扩展时引起的学生认知上的困惑:非负有理数乘法的意义已经不再适合,新的意义又尚未建立起来。对于异号两数相乘,既可以用加法来解释,又可以用乘法来解释,正确率如下(表 1)。

表 1 学生对异号两数相乘意义回答的正确率(人次 276)

回答类型	人 数	百分比 (%)
正确的加法回答	85	30.8
正确的乘法回答	62	22.5
总 计	147	53.3

也就是说,有 53.3% 的学生给出了正确的回答。进一步分析发现,使用加法出现错误的有 25%,比乘法 19.6% 的错误率稍高。

2. 两个负数相乘

正确的理解:解释为积。比如,学生 S5: $(-4) \times (-6)$ 的意义是 -4 与 -6 相乘的积是多少?

T:积是多少?

S5:同号两个数相乘,积为正,结果是 24。

T:你把 $(-4) \times 7$ 解释为 7 个 -4 相加的和,我感到比较清楚。以上解释,你感到清楚吗?

S5:我感到不太清楚。我解释不清楚,根据法则来做就行了。

两个负数相乘的意义是什么?是求这两个数的积;积是什么呢?相乘的结果是积;积是多少?是 24。这就是说,虽然相乘的意义不好解释,但好计算,所以

算就行了,只能用计算的结果来说明算式的意义。我们认为这就是一种正确的解释:所谓运算就是为集中的两个元找到唯一一个对应元,这个对应元找到了,运算的意义就知道了。

表 2 学生对 $(-4) \times (-6)$ 意义的回答情况(人次 138)

回答类型	人 数	百分比 (%)
没有回答	5	3.6
错误的加法回答	33	23.5

解释两个负数相乘的意义是一个真正的困难。因为“数的运算从内涵到法则都发生了变化,必须重新建立^[3]。” 4×7 、 $(-4) \times 7$ 可以用原来所学习的正有理数乘法意义来解释,而 $(-4) \times (-6)$ 就不行了,乘法的意义需要扩展,扩展的结果就是一种形式化的东西。

(二) 错误的理解

(1) 负数个。比如,学生 S6:一个球 7 元钱,小明买了 -4 个多少钱?

比如,学生 S8: $(-4) \times (-6)$ 的意义是 -4 个 -6 的和是多少。

T:什么是一 6 个。

S7:按小学时所学的,几个几相加的和。

T:-6 个你感到能够说清楚吗?

S7:不太清楚。

学生希望用加法来说明乘法,而要用加法来说明乘法的意义,就要解释清楚几个或者几分之几个,于是就出现了负数个的错误。

(2) 负数倍。比如,学生 S8: $6 \times (-5)$:6 的 -5 倍是多少? -5 个 6 是多少?

什么是 -5 倍?这是典型的整数乘法的负迁移作用。

五、有理数乘法的意义是什么

解释有理数乘法的意义时,学生总是从已有的知识寻求支撑,于是便有了以上错误。只要人们继续想把负数用事物的个数概念来表示,而没有认识到在新概念建立之后,其逻辑形式法则起主导作用,人们对负数的疑问就会存在下去。也就是说,在理解有理数乘法的意义时,如果继续沿着原来的路线,就行不通了。表面上看,错误的原因是整数乘法的负迁移作用,实质上则是乘法意义的扩展。

整数乘法的意义最好理解,因为有整数的加法作为基础。本质上,乘法就是加法。分数乘法的意义(小数乘法的意义本质上就是分数乘法的意义)就扩展了。乘法对加法的依赖性明显地在减弱,也就是说,乘法与加法的关系不断地疏远,不可能再把乘法还原成加法的简便运算。到了有理数乘法,把(下转第 43 页)

解决问题的渴求。在高校提供理论支持的情况下开展和组织多种形式的教育沙龙、专题讲座、座谈会,以及利用信息网络交流和研讨教育管理、课程改革、教学改革、教师专业发展等领域的问题、研究成果和实践经验。

这条途径的主导者是基础教育学校和基础教育教师。这是一条自下而上的自发的硕士后继续教育模式,高等学校依然担当着理论指导的角色。

山东师范大学毕业的教育硕士在这方面已经进行了尝试,他们于 2006 年 3 月成立了教育硕士联盟,召开了联盟成立大会,组建了联盟管理机构。

总之,通过以上途径可以解决当前山东省拥有硕士学位层次基础教育师资的硕士后继续教育问题,但不难看出,在解决这个问题中突现了三个重要元素:高校、政府和基础教育教师。高等学校在硕士后继续教育中承担了理论指导的重要角色,始终贯穿于三条途径中;而政府和基础教育的执行者之间相互作用、相互促进是推动硕士后继续教育的源动力,也是推动基础教育改革不断前进的源动力。

参考文献:

- [1]任亮,徐富明.中小学教师攻读教育硕士学位动机的调查研究[J].天津师范大学学报(基础教育版),2005(2).
- [2]任亮,徐富明,杨阿丽.教育硕士的进修动机与学习效果研究[J].辽宁教育研究,2005(5).
- [3]徐富明,黄文锋.中小学教师攻读教育硕士的求学动机和成效研究[J].教学与管理,2005(4).
- [4]徐富明,任亮.教师在职攻读教育硕士专业学位的学习成效及其影响因素研究[J].教师教育研究,2005(3).
- [5]黄文锋,徐富明.教育硕士求学动机的调查研究[J].现代中小学教育,2005(3).
- [6]马健生、滕珺,论我国教育博士 _Ed_D_ 专业学位设置的迫切性和可行性.学位与研究生教育[J].2007(8).
- [7]张应强.关于设置教育博士专业学位的政策建议[J].现代大学教育,2003(1).
- [8][伊朗]S·拉塞克,[罗马尼亚]G·维迪努,从现在到 2000 年教育内容发展的全球展望:第 1 版[M].马胜利等译.北京:教育科学出版社,1992:270.
- [9]王国道,孙树魁.教育联盟:21 世纪中国成人高教发展战略[J].中国成人教育,2002(2).
- [10]闻珍霞,孙中明,教育联盟与市场机遇[J].农机化研究,2003(4).

(责任编辑:车丽娜)

(上接第 39 页)乘法还原成加法的愿望根本不能实现,想通过直观的方式来表征乘法也很难做到,即便做到了,也很牵强。因为负数本身一点都不直观。既如此,就很难用原来的方式来理解有理数乘法了,也就是说,不能过多地寻求直观,而应该从推理、逻辑、形式的角度来理解有理数乘法。

从现代数学的角度来看,有理数乘法的扩展所必须遵循的基本原则就是保持“运算的持续性”或者说“承袭性”:原来的运算得以承袭,新的运算能够进行下去。也就是说,负数出现后,对于有理数乘法的基本要求是,非负有理数的乘法运算能够继续进行下去,而且不发生变化,同时,对负数也能够进行运算。在这个基础上,来探讨、界定有理数乘法。这也容易理解,只有站在前人的基础上,才能更好地前进。

六、结论与建议

(一)有理数乘法意义的抽象性与形式性

有理数乘法是一个抽象的、形式化的概念,是“保持运算的承袭性”而做出的一种约定。正为有理数乘法是一个形式化的东西,所以,当我们来理解乘法的意义时,除了尽可能地从直观上去理解以外,还要看到它抽象的一面、形式化的一面。可以说,如果不能够从形式化的角度来理解,就不可能真正地理解乘法的

意义。事实上,到了无理数、复数的运算,就更加抽象和形式化了。

(二)理解的困难性与有限性

正因为有理数乘法意义的抽象性和形式性,导致了学生对有理数乘法意义理解的困难性与有限性。有理数乘法具有形式化的意义,但是由于中学生认知水平有限,我们不可能从形式化的角度来介绍有理数乘法的意义,这就导致学生对有理数乘法意义的困难理解。其实,别说学生,即便是教师,对有理数乘法意义的理解也存在着诸多困惑和错误,教师的理解水平也并没有比学生的高。

(三)课程目标的层次性与适切性

学生、教师对有理数乘法意义理解的有限性和困难性,与有理数乘法意义本身所具有的抽象性和形式性表明,课程目标必须具有层次性与适切性。

参考文献:

- [1]中华人民共和国教育部.全日制义务教育数学课程标准(实验稿)[M].北京:北京师范大学出版社,2001:89.
- [2]马复.数学教师教学用书(七年级上册)[M].北京:北京师范大学出版社,2002:35-36.
- [3]范良火.数学(七年级上册)教学参考书[M].浙江:浙江教育出版社,2006:45.

(责任编辑:车丽娜)