

小学数学核心素养的构成要素分析

刘晓萍 陈六一

摘 要 《义务教育数学课程标准（2011 年版）》以及《解读》，都没有对数学素养的内涵与外延进行界定，导致小学数学素养的培养无法具体落实。通过文献梳理、问卷调查，综合分析可知，小学数学核心素养包括数学人文、数学意识和数学思想三大要素及诸多二级细分。对小学数学核心素养的界定，既要注重核心素养的生成过程，又要注重核心素养的外显，强调在真实情境中的表现，体现课程标准中课程目标的要求。为了更全面地落实小学数学核心素养，尤其要注意核心素养测试题的编制与教学策略的不断探索。

关 键 词 核心素养；数学文化；数学人文；数学意识

作者简介 刘晓萍，江苏省苏州市教育科学研究院教研员，中学高级教师；陈六一，江苏省苏州市阳山实验小学学校高级教师

教育部印发的《关于全面深化课程改革，落实立德树人根本任务的意见》中六次提到“核心素养”一词。这既体现着国际教育发展与变革的趋势，也承载着国家以教育增强核心竞争力的迫切性。然而，尽管《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中四处出现了“数学素养”这一术语，可是其中以及相关人士的《解读》都没有对数学素养的内涵与外延进行界定，导致小学数学素养的培养无法具体落实。为此，我们借课题研究之机，以文献分析、问卷分析和系统分析的方法，对小学数学素养的相关研究进行梳理，试图探讨：国内外专家对数学素养有着怎样的基本认识？基于文献和苏州地域小学数学教师的问卷，小学数学核心素养由哪些要素构成？小学数学核心素养的界定依据是什么？

一、国内外研究者对数学素养的基本认识

关于对数学素养的基本认识，这里梳理国内外文献资料的关注点在于：提出数学素养的起始阶段，学者们意向何在？随着时代的发展，专家们又有着怎样的解读？从起始到当代，国内外的研究大

致分成了哪几种观点？

1. 数学素养 = 先天素质 + 后天学习

我国曾在 20 世纪 90 年代提出“素质教育”理念，就数学方面落实在学生身上要求的便是数学素养。所以，有课题组对数学素养的解释是：以人的先天生理特点为基础，在后天的环境和数学教育影响下形成并发展的心理方面的稳定属性。^[1]王子兴也有近似的诠释：数学素养是在人的先天生理基础上，通过后天严格的数学学习活动获得的、融于身心中的一种比较稳定的状态。^[2]

2. 数学素养 = 数学知识 + 基本能力

“算术、实数、测量、图形、统计”是 J. R. Zacharias 教授认为的数学素养。西澳大利亚州教育署则认为数学素养包括使用整数、分数、小数、百分数、钱数和测量时掌握基本数表的能力、运算的技能和对空间做出合理估算的习惯。在 Crowther 的报告中，数学素养具有两层含义：（1）对观察、假设、实验、验证等科学研究方法的理解；（2）现代社会定量思考和认识问题程度的需要。

以上两种观点，和我国提出的“双基”教学，即基础知识、基本能力的说法十分相近。在其内涵中数学的陈述性知识和程序性知识是学生在课堂中

必须习得的内容。其实，西方数学教育历经“新数学运动”与“回到基础”的“钟摆”，就是对“双基”的重新认识。

3. 数学素养 = 数学方法 + 关键能力

德安布罗西澳提出数学素养的内涵为：进行推理、提出假设和下结论的能力。^[3]也就是说，一定的数学方法和几项关键的能力，决定着学生对数学的领悟程度，决定着他们今后在生活中对数学的运用效率。正如著名的科克罗夫特报告——基于对英国研究了二十多年的数学素养内涵进行拓展认为，数学素养应该是运用数字和数学技能，懂得和理解诸如图表、曲线、百分比等数学语言所含信息的能力。这一论述成为20世纪80年代以后英国数学基础教育改革的出发点。美国数学教师协会也曾将“懂得数学的价值、对自己的数学技能有信心、有解决数学问题的能力、学会数学交流、学会数学的思想方法”^[4]作为数学素养的内涵，并以此设定为美国数学课程与教学的中心。为中国教育界所熟知的PISA，在2012年的测试中对数学素养直接给出了“方法+能力”的表述：个体能在各种情况下形成、使用和解释数学的能力，包括数学推理等，来描述、解释以及预测现象。^[5]

回到国内，蔡上鹤先生作为《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用）》的重要起草成员，自1992年10月开始，连续发文，提出“数学素养包括数学知识技能素养、逻辑思维素养、运用数学素养和唯物辩证素养”。

可见，中外研究者都将“素养”与“素质”聚焦到了数学方法和推理等逻辑思维能力上，这样在课堂实践中，一线教师也就有了教学的抓手。

4. 数学素养 = 数学价值 + 数学行为

“在数学学习过程中，学习者通过数学学习，加深对数学知识的理解，内化数学文化的成果，最终在学习者身上体现的一种时代价值，同时能够主动将数学理论应用于生产生活实践。”^[6]这是郑强教授对数学素养的解读。何小亚分析数学素养的构成要素为：数学运算、数学推理、数学意识、数学思想方法和数学情感态度价值观。^[7]康世刚教授、宋乃庆教授联合发文指出：数学素养指学生在已有数学经验的基础上，通过数学活动对数学的体验、感悟和反思，并在真实情境中表现出来的一种综合性特征。广义地讲是一种综合性特征，狭义地讲，

是指在真实情境中有意识地应用数学知识与技能理性地处理问题的行为特征。^[8]最近几年，我国一些从事大学数学师范教育的课程论、方法论的教授，开始自觉按照课程标准的要求，将数学素养建构在情感态度与价值观的维度之上。

以上各种观点按时间轴整理，详情如表1。

表1 国内外研究者对数学素养的基本认识

时间	代表人物	基本认识
1959年	Crowther	观察、假设、实验、验证、定量思考
1974年	J. R. Zacharias	算术、实数、测量、图形、变化率、统计
1977年	西澳大利亚教育署	数表的能力、运算的技能和对空间做出合理估算的习惯
1982年	科克罗夫特	数字和数学技能理解图表、曲线、百分比等能力
1986年	美国数学教师协会	数学的价值、数学技能有信心、解决数学问题的能力
1992年	蔡上鹤	知识技能、逻辑思维、运用数学和唯物辩证
1997年	“MA”课题组	先天生理特点，后天的数学教育影响下的稳定属性
1997年	数学素养教育策略发展研讨会	基本数学概念和技能、数学思维和策略、一般思维技能和有根据的欣赏情境，也包括在情境中使用数学的意向
2002年	王子兴	先天生理基础，后天比较稳定的状态
2005年	郑强	数学文化，时代价值或自己达到的新水平
2012年	PISA	用数学推理等来描述、解释以及预测现象
2015年	何小亚	运算、推理、意识、思想方法和情感态度与价值观
2015年	康世刚、宋乃庆	体验、感悟和反思，表现出来的一种综合性特征

二、小学数学核心素养的要素构成

从上述国内外的研究成果分析可见，尽管对于“什么是数学素养”还没有一个统一的界定，但各国都强调数学素养的重要性，也潜在地具有一些共识：数学素养唯有通过数学学习才能习得，是不同于其他学科学习的收获，是数学学习独特的结晶。而据数学家波利亚研究：仅有1%的学生今后可能会成为专门的数学研究者，29%的学生将来会继续

使用数学，70%的学生离开学校后不会再使用小学以上的数学知识。^[9]无疑，习得的小学数学素养的高低，即意味着绝大部分国民素质的高低。这也要求，通过小学数学的学习，必须习得一定的数学素养，方能立足于未来。当然，这样的数学素养由于要伴随人的一生，一定得是基础的；而且是人人必须的，所以具有普遍性；还要通过数学，通向生命成长，所以这样的素养也务必具有高度关联性。据此说来，小学数学核心素养指的是：通过小学阶段的数学学习，为了满足自身发展和社会发展，所必备的数学思维与数学文化。

对于这样的数学思维与数学文化，为了厘清其中可教、可学、可测评、可分学段阐述的特质，我们又对苏州 1386 名小学数学教师，就小学数学核心素养的相关知识进行了问卷分析。最终推断出小学数学核心素养的构成要素为：数学人文、数学意识、数学思想。

这样推断的依据是什么呢？课程标准提出了义务教育阶段数学学习的总目标是：一、学生能获得社会生活和进一步学习所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验；二、体会数学与生活之间的联系，会运用数学的思维方式思考……增强解决问题的能力；三、了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心。这个总目标分解成“知识技能”“数学思考”“问题解决”和“情感态度”四个方面。对照课程标准的总目标，可将其第一条分解出“数学思想”，剩下的“三基”加上第二条和“知识技能”“数学思考”“问题解决”三个方面归结为“数学意识”，其第三条和“情感态度”方面概括为“数学人文”。爱因斯坦曾有一句著名的教育论断“所谓教育，就是一个人把在学校所学全部忘光后剩下的东西。”通过小学数学要给孩子积淀终身受用并渗透进日常生活的东西，即用数学意识与数学思想解释世界，而解释世界的数学思维离不开数学人文的激活与提升。因此，数学人文、数学意识、数学思想构成了小学数学素养的核心所在。

而且我们此次的问卷，苏州下辖区县的小学数学教师都有参与，可谓覆盖面广泛。其中城镇学校占 76.19%，农村学校占 23.81%；男教师占 24.89%，女教师占 75.11%。同时，为了听见不同的声音，问卷的层面也比较宽泛：特级教师占

0.14%，市级骨干教师占 3.61%，区县级骨干占 20.2%，校级骨干占 12.99%，一线教师占 69.46%，校长、教导主任占 4.55%。当然，有不少教师的身份是交叉的。这些不同的身份群体，对小学数学核心素养却有着大致相当的认识：数学的本质是数学思想，数学的动力是数学人文，数学的基点是数学意识。

数学人文：意指对数学的持久兴趣与好奇，对数学美有追求，会数学交流。其关注点是动机、审美、表达。具体地说就是学生愿学数学；脑海中经常性构建数学问题；知道数学学习的过程会遇到困难，但不逃避数学困难；懂得欣赏数学结构的真与美；懂得数学简洁、缜密，乃至答案唯一、规则统一的价值；喜欢数学阅读，会用数学语言交流与写作。

数学意识：包含数学运算、空间观念、符号意识、解决问题的策略。其关注点是学会、基础、方法。具体地说就是学生会从数学的角度解释生活，也会从数学本身解构数学；有属于自己的良好的解释与解构的方式；能运用数学的本质拓展智力边界。

数学思想：涵盖抽象、推理、建模三种数学思想。其关注点是会学、理性、智慧。具体地说就是学生在愿学的基础上，在数学思想的引领下，提升思维品质，提高数学学习的效能，成为会学数学的学生。即能把较为复杂的数学问题，通过合情推理，转化为熟知的数学知识；能把较为复杂的生活情境，抽象为数学问题，再运用数学的模型予以解决。

这些小学数学核心素养还可以再作分解，二级指标如表 2。

表 2 小学数学核心素养二级指标表

一级指标	二级指标
数学人文	对数学的持久兴趣与好奇
	对数学美有追求
	会数学交流
数学意识	数学运算
	空间观念
	符号意识
	解决问题的策略
数学思想	抽象
	推理
	建模

经常听到老师们说课堂只有激发了学生的学习兴趣,学生才有可能深入地去学习数学。这种说法只对了一半,其实学生求学伊始,大多都对数学充满着兴趣,因为人总有对未知好奇的心理。只是,随着枯燥的训练、乏味的讲解,由着年级的升高,越来越多的学生不喜欢数学了,于是老师不得不想尽招数刺激学生爱数学^[10]。所以兴趣既是小学数学学习的手段,也是目的。再则,回顾数学史,数学起源于生活生产、宗教仪式、数学欣赏。^[11]这启示我们除了生活应用,数学的形式美是学生继续求知的不竭动机。同时,语言不仅是思维的外壳,也是小学生展示数学理解数学成功的心理需求。基于此,提出了数学人文的二级指标含有:对数学的持久兴趣与好奇、对数学美有追求、会数学交流。

及至数学意识,基于上文所述,日常生活生产的需要诞生了数学,而且数学的发展得益于生活应用,自然小学生学会数学的显著标志无疑是能运用数学知识解决生活问题。要想成功解决生活问题,小学生需要不断提高数学运算、几何空间与符号图式的水平,课程标准亦是把“符号意识”“空间观念”“运算能力”作为核心词并列列出;同时,也只有在解决问题的过程中,不断调整、反思、积累属于学生自己的如佛赖登塔尔所云的数学“再创造”,“数学化”方臻于形成。

“在学校学的数学知识,毕业后若没什么机会去用,一两年后,很快就忘掉了。然而,不管他们从事什么工作,唯有深深铭刻在心中的数学精神、数学思想等,却随时随地发生作用,使他们终身受益。”^[12]米山国藏的这段关于“数学思想”的阐释,颇深入人心更流传甚广。史宁中先生也认为:“数学思想是数学文化的核心,因为数学文化是数学的形态表现,可以包括:数学形式、数学历史、数学思想。其中思想是本质的,没有思想就没有文化。数学思想可以归纳为三种:抽象、推理和模型。”^[13]的确,通过抽象,把外部世界与数学有关的东西概括到数学内部,形成数学研究的对象;通过推理,得到数学的命题和计算方法,促进数学内部的发展;通过建模,创造出具有表现力的数学语言,构建了数学与外部世界的桥梁。参照两位数学教育大家的思考,便在“数学思想”要素中以“抽象”“推理”“建模”作为二级指标,这样可指导课堂教学评价,也可考查学生通过数学学习

达到的相关程度如何。

三、小学数学核心素养的界定反思

数学核心素养不能用“素养+数学例子”来定义,也不是“数学知识、数学技能、关键能力、情感态度”中某几项的简单相加。小学数学核心素养具有基础性、普遍性和高度关联性,因此它不是要求围绕一个或者两个方面的能力进行培养,而是要协调、综合、均衡发展,从而帮助“小学生”这个特定年龄段的儿童,能够满足未来生活与学习对数学的挑战和新的超越。所以对小学数学核心素养的界定,既要注重核心素养的生成过程,又要注重核心素养的外显,强调在真实情境中的表现,体现课程标准中课程目标的要求。前文的要素构成分析大致做到了这一点,如图1所示。

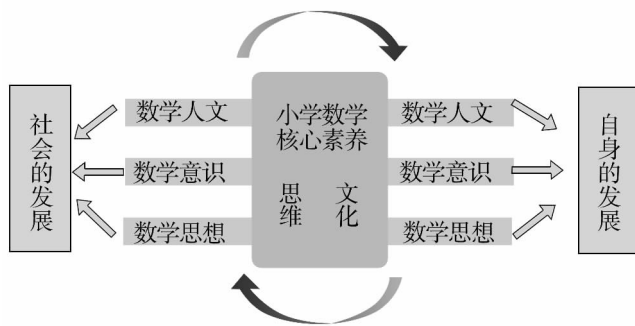


图1 小学数学核心素养动态示意

当然,为了更全面地落实小学数学核心素养,需尤其注意核心素养测试题的编制与教学策略的不断探索。

第一,编制符合基于地域的小学数学核心素养测试题。尽管PISA的数学评价测试题给了我们很高的参考价值,但大多题目并不符合我们的教学实际。也尽管在各级各类的考试中,出现了开放题、探究性问题,但是这些题型对测试小学数学核心素养的哪些方面,缺乏系统的实证研究。

第二,探索小学数学核心素养生成的教学策略。当前,国内外对数学素养研究的聚焦层面都不尽相同,而且对于影响小学生核心素养的教学因素没有深入分析,因此,探索小学数学核心素养生成的教学策略,有助于促进教学方式的改进。

郑毓信教授曾提醒“如果缺乏足够自觉的话,数学固有的特性可能在各个方面导致消极的后果,包括研究思想、学术态度乃至(下转第48页)

2. 从个别到一般

从个别到一般使用的是（不完全）归纳法，即发现某类有限个数对象共有相同的数学特点和规律，从而推出所有（任意）的此类对象都具有这样的特点和规律。小学生在生活中常会使用归纳法，归纳结果的合理性和可靠性是他们认可的。当经验得以建构，学生明晰其中的特点和规律，教师就可以鼓励学生归纳出一般的结论。

3. 从详尽到概括

学生在经验建构过程中获得了详尽的活动操作步骤，这些操作步骤蕴藏着解决问题的思想和方法，需要概括便于记忆和迁移，如“平行四边形面积公式的推导过程”，学生能有条理地说出推导步

骤和依据后就完成了经验建构，在此基础上可以如此概括“把平行四边形转化为学过的图形”，突出“转化”这一关键方法，使经验得以提升。由于小学生词汇掌握量少，语言组织能力薄弱，他们往往不能独立概括，教师应当给予示范并要求学生模仿记忆。

基于经验的教学活动，须使学生切实经历经验调动、建构和提升这一系列过程，方能达到活动的目的，即数学的理性认识。

参考文献:

- [1] 张奠宙, 竺仕芬, 林永伟. 基本数学经验的界定与分类[J]. 数学通报, 2008 (5).

(上接第45页) 人生哲学等。”^[14] 所以数学核心素养的积淀, 不是“对”和“错”的取舍, 而是可能会出现“好”与“坏”的利弊。那么在教学实践中, 既应当明澈小学数学核心素养对小学生成长的助力, 也应当清醒地看到, 如果只强调核心素养, 可能会忽视人的全面发展过程中需要的非核心素养, 但这个非核心素养对于某个具体的学生, 又有可能是必须的, 或者说是适切的。

参考文献:

- [1] 连云港市“MA”课题组. “发展学生数学思想, 提高学生数学素养”教学实验研究报告[J]. 课程·教材·教法, 1997 (8): 35-39.
[2] 王子兴. 论数学素养[J]. 数学通报, 2002 (1): 6.
[3] 陆昱任. 论数学素养之意涵及小学阶段评量工具之开发[D]. 台北: 台湾师范大学, 2004.
[4] 艾斯纳. 教育想象——学校数学课程与评价标准[M]. 李雁冰, 译. 北京: 教育科学出版社, 1989: 37.

- [5] 王洁. PISA 2012 评估和分析框架[J]. 外国中小学教育, 2013 (10): 264.
[6] 郑强. 论数学素养及其在数学课程中的价值体现[J]. 曲阜师范大学学报, 2005 (2): 127.
[7] 何小亚. 学生数学素养指标的理论分析[J]. 数学教育学报, 2015 (2): 13-20.
[8] 康世刚, 宋乃庆. 论数学素养的内涵及特征[J]. 数学通报, 2015 (3): 8-12.
[9] 冯契. 哲学大辞典(修订本)[Z]. 上海: 上海辞书出版社, 2001: 818.
[10] 陈六一. 学生为什么越来越不喜欢数学[J]. 中小学数学, 2008 (12): 24-25.
[11] 卡尔·B·博耶. 数学史[M]. 秦传安, 译. 北京: 中央编译出版社, 2013: 3-8.
[12] 米山国藏. 数学的思想、精神和方法[M]. 毛正中, 译. 成都: 四川教育出版社, 1986: 10.
[13] 史宁中. 数学的基本思想[J]. 数学通报, 2011 (1): 1-3.
[14] 郑毓信. 数学教育哲学的理论与实践[M]. 南宁, 广西教育出版社, 2008: 40.