假设检验方法分析及应用

马凤鸣[a]，王忠礼[b]
(吉林建筑工程学院 a. 管理学院; b. 测绘学院，长春 130118)

摘 要:假设检验是统计学中的一种重要方法,也是统计推断的重要组成部分。假设检验的种类与方法有时不易确定,显著性水平的涵义亦是教学中的难点。通过对假设检验进行的步骤分析与应用,由对比应用可知,无论哪一种类型的假设检验,其结论应该是一致的,解题步骤的程序化也使得问题更易于接受。

关键词: 假设检验; 统计; 分析; 应用
中图分类号: O213 文献标志码: A 文章编号: 1009－3907(2012)02－0188－05

1 假设检验方法分析

高等院校经济类与管理类专业与工科各专业及的核心课程中,一般设有《社会经济统计学原理》与《概率论与数理统计》这两门必修课程。这两门课均是“统计”,但前者侧重研究经济统计资料的搜集、整理和分析的一般原理和方法,是研究各领域客观现象的数量规律性科学,为应用统计学; 后者是数学基础课程,是应用纯逻辑推理的方法研究抽象的随机现象的数量规律的科学,为理论统计学。二者既有联系又有区别,对于刚接触相关概念的学生来说,跨学科的概念衔接仍存在着一定困难,有必要对此展开讨论,以提高教学效果。假设检验亦称“显著性检验(Test of statistical significance)”,是用来判断样本与样本,样本与总体的差异是由引起还是本质差别造成的统计推断方法。其基本原理是先对总体的特征作出某种假设,然后通过抽样研究的统计推理,对此假设应该被拒绝还是接受作出推断。

假设检验方法在生产与实践中有着广泛的应用。在大学学习阶段,工科院校及经济类与管理类专业的学生先后在概率论与数理统计、统计学原理、企业管理、市场营销与抽样调查等课程中都有所学习与接触,但学生普遍反映不好接受,掌握的不够扎实。究其原因: 一是由于数学的抽象性特点决定的,二是由于专业思想原因造成的。社会经济统计学是以概率论与数理统计为基础,社会经济统计学的公式都是由概率论与数理统计演变而来。社会经济统计学更注重公式的应用,而概率论与数理统计注重的是基本理论的教学与公式本身的推导与适用条件的研究。如果我们把假设检验问题程序化、步骤化。在教学中的做法是:

(1) 根据实际情况提出原假设和备择假设;

(2) 选择容许的显著性水平,并根据相应的统计量的统计分布表查出相应的临界值(ctrit) 以及接受区域与拒绝区域,并画出示意图;

(3) 根据样本观察值,计算检验统计量的观察值(obs)

(4) 根据检验统计量观察值的位置决定对原假设的取舍，作出判断,得出结论。

这样一来,就简化了繁杂数学推导,跳出了抽象公式的羁绊,会使问题简单许多,其教学效果也更加理想。

2 应用举例

2.1 例1: 某市区有3万户居民,根据历史资料,其家庭每月收入服从正态分布每月户均收入为750元,标准差为150元。今年该区城市调查队随机抽取100户居民,计算出户均收入为780元. 据此抽样结果,认为

“该区居民的月均收入水平没有发生显著的变化”。

收稿日期: 2011－01－12
基金项目: 东北师范大学2009级博士论文创新基金项目: 10SSXT131
作者简介: 马凤鸣(1962-),男,吉林舒兰人,副教授,主要从事建筑经济学、城市经济学和管理数学的教学与研究工作。

请在 $\alpha=0.05$ 的显著水平下判断这个结论是否正确?

解法 1　(双侧检验解法)

(1)建立假设。由于是双侧检验,所以:

原假设:H_0:$M=M_0=750$ 元

备择假设:H_1:$M\neq M_0=750$ 元

(2)对于给定的显著水平 $\alpha=0.05$,$\bar{x}=780$ 元。

因为是双侧检验,所以两边拒绝区间的概率各为 $\frac{\alpha}{2}=0.025$,由于拒绝区间的概率为:$\alpha=0.05$,所以接受区间的概率为:$1-\alpha=0.95$;查表正态分布表:$F(t)=1-\alpha=0.95$,临界值:$\pm t_{\frac{\alpha}{2}}=\pm t_{0025}=\pm 1.96$,故接受区间为:$[-1.96,1.96]$,而拒绝区域为:$(-\infty,-1.96)\cup(1.96,+\infty)$

(3)计算样本统计量:$t=\frac{\bar{x}-M_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{780-750}{150/\sqrt{100}}=\frac{30}{15}=2$。

(4)做出判断。由于实际的统计量:$t=2$ 落入拒绝区间,所以我们有理由拒绝原假设 H_0,而接受备择假设 H_1,即认为该区居民每月平均收入水平有明显的变化。由于样本高于 750 元,所以认为总体也是高于 750 元的。

解法 2　(左单侧检验解法)

(1)建立假设。由于是左单侧检验,所以:

原假设:H_0:$M\geq M_0=750$ 元

备择假设:H_1:$M<M_0=750$ 元

(2)给定显著水平 $\alpha=0.05$,$\bar{x}=780$ 元。

由于是左单侧检验,所以拒绝区间的概率为:$\alpha=0.05$;

接受区间的概率为:$1-\alpha=0.95$;

查表正态分布表:$F(t)=1-2\alpha=0.90$,临界值:$t_\alpha=t_{0025}=1.65$,

故接受区间为:$[1.65,+\infty)$,而拒绝区域为:$(-\infty,1.65)$。

(3)计算样本统计量:$t=\frac{\bar{x}-M_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{780-750}{150/\sqrt{100}}=\frac{30}{15}=2$。

(4)做出判断。由于实际的统计量:$t=2$ 落入接受区域,所以我们有理由接受原假设 H_0,而拒绝接受备择假设 H_1,即认为该区居民每月平均收入水平有明显的变化(高于 750 元)。

解法 3　(右单侧检验解法)

(1)建立假设。由于是右单侧检验,所以:

原假设:H_0:$M\leq M_0=750$ 元

备择假设:H_1:$M>M_0=750$ 元

(2)对于给定的显著水平:$\alpha=0.05$,$\bar{x}=780$ 元。

由于是左单侧检验,所以拒绝区间的概率为:$\alpha=0.05$;

所以接受区间的概率为:$1-\alpha=0.95$;查表正态分布表:$F(t)=1-2\alpha=0.90$,临界值:$t_\alpha=t_{0025}=1.65$,故接受区间为:$(-\infty,1.65]$,而拒绝区域为:$(1.65,+\infty)$。

(3)计算样本统计量:$t=\frac{\bar{x}-M_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{780-750}{150/\sqrt{100}}=\frac{30}{15}=2$。

(4)做出判断。由于实际的统计量:$t=2$ 落入拒绝区域,所以我们有理由拒绝原假设 H_0,而接受备择假设 H_1,即认为该区居民每月平均收入水平有明显的变化(高于 750 元)。

2.2　例 2:根据下表的数据资料,对所建立的一元回归模型进行相关系数与回归系数的检验。(显著水平 $\alpha=0.05$)

产品产量与产费用及回归方程、相关系数计算表					
年 份	产品产量 x(千吨)	生产费用 y(千元)	x^2	y^2	xy^2
1997	1.2	620	1.44	384400	744
1998	2.0	860	4.0	739600	1720
1999	3.1	800	9.61	640000	2480
2000	3.8	1100	14.44	1210000	4180
2001	5.0	1150	25.0	1322500	5750
2002	6.1	1320	37.2	1742400	8052
2003	7.2	1350	51.84	1822500	9720
2004	8.0	1650	64.0	2560000	12800
合计	36.4	8800	207.54	10421400	45446

2.2.1 建立的一元回归模型

根据一元线性回归方程的参数计算公式,计算得出:

$$b=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-(\sum x)^2}=\frac{8\times45446-36.4\times8800}{8\times207.54-36.4^2}=128.9599,$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=\frac{8800}{8}-128.9599\times\frac{36.4}{8}=513.2323,$$

$$r=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{\sqrt{[n\sum x^2-(\sum x)^2][n\sum y^2-(\sum y)^2]}}$$

$$=\frac{8\times45446-36.4\times8800}{\sqrt{[8\times207.54-36.4^2][8\times10421400-8800^2]}}=0.9697。$$

则有一元线性回归方程为:$\hat{y}=313.2323+128.9599x$;相关系数 $r=0.9697$。

2.2.2 相关系数的检验,根据上述数据得到如下计算表:

一元回归模型 F 检验计算表					
年 份	产品产量 x(千吨)	生产费用 y(千元)	$\hat{y}$	$(\hat{y}-\bar{y})^2$	$(y-\hat{y})^2$
1997	1.2	620	667.98418	186637.67	2302.4815
1998	2.0	860	771.1521	108140.94	7893.9493
1999	3.1	800	913.00799	36966.012	12770.806
2000	3.8	1100	1003.2799	9354.7739	9354.7739
2001	5.0	1150	1158.0318	3367.6898	64.509811
2002	6.1	1320	1299.8877	39955.089	404.50501
2003	7.2	1350	1441.7436	116788.67	8416.8845
2004	8.0	1650	1544.9155	197946.24	3034.7428
合计	36.4	8800	8799.9988	697157.09	44242.653

解法1 (双侧检验解法)

(1)建立假设。假设相关关系不显著,由于是双侧检验解法,即:

原假设:$H_0:\beta=0$,

备择假设:$H_1:\beta\neq0$。

(2)对于给定的显著水平 $\alpha=0.05$,$f_1=1$,$f_2=n-2=8-2=6$,因为是双侧检验,所以拒绝区间的概率为 $\alpha=0.05$,接受区间的概率为:$1-\alpha=0.95$;查 F 分布表得临界值:$F_{0.05}(1,6)=5.99$,故接受区间为:[0,5.99],而拒绝区域为:$(5.99,+\infty)$。

(3)计算样本统计量:$F=\dfrac{\sum(\hat{y}-\bar{y})/f_1}{\sum(y-\hat{y})/(n-2)_1}=\dfrac{697157.09/1}{44242.653/6}=94.54547$。

（4）做出判断。由于实际的统计量：$F=5.99$ 落入拒绝区间，所以我们有理由拒绝原假设 H_0，而接受备择假设 H_1，即认为回归效果显著。

解法 2 （左单侧检验解法）

（1）建立假设。，即：

原假设：$H_0:\beta\geq 0$，

备择假设：$H_1:\beta<0$。

（2）对于给定的显著水平 $\alpha=0.05$，$f_1=1$，$f_2=n-2=8-2=6$，

因为是双侧检验，所以拒绝区间的概率为 $\alpha=0.10$，接受区间的概率为：$1-2\alpha=0.90$；查 F 分布表得临界值：$F_{0.105}(1,6)=3.78$，故接受区间为：$[3.78,+\infty)$，而拒绝区域为：$(0,3.78)$。

（3）计算样本统计量：$F=\dfrac{\sum(\hat{y}-\ddot{y})/f_1}{\sum(y-\hat{y})/(n-2)_1}=\dfrac{697157.09/1}{44242.653/6}=94.54547$。

（4）做出判断。由于实际的统计量：$F=5.99$ 落入接受区域，所以我们有理由接受原假设 H_0，而拒绝备择假设 H_1，即认为回归效果显著。

解法 3 （右单侧检验解法）

（1）建立假设。，即：

原假设：$H_0:\beta\leq 0$，

备择假设：$H_1:\beta>0$。

（2）对于给定的显著水平 $\alpha=0.05$，$f_1=1$，$f_2=n-2=8-2=6$，

因为是双侧检验，所以拒绝区间的概率为 $\alpha=0.10$，接受区间的概率为：$1-2\alpha=0.90$；查 F 分布表得临界值：$F_{0.105}(1,6)=3.78$，故接受区间为：$[0,3.78]$，而拒绝区域为：$(3.78,+\infty)$

（3）计算样本统计量：$F=\dfrac{\sum(\hat{y}-\ddot{y})/f_1}{\sum(y-\hat{y})/(n-2)_1}=\dfrac{697157.09/1}{44242.653/6}=94.54547$。

（4）做出判断。由于实际的统计量：$F=3.78$ 落入拒绝区域，所以我们有理由拒绝原假设 H_0，而接受备择假设 H_1，即认为回归效果显著。

2.2.3　回归系数的检验

解法 1 （双侧检验解法）

（1）建立假设。由于是双侧检验解法，即：

原假设：$H_0:\beta=0$，

备择假设：$H_1:\beta\neq 0$。

（2）对于给定的显著水平 $\alpha=0.05$，$f_1=1$，$f_2=n-2=8-2=6$，因为是双单侧检验，所以拒绝区间的概率为 $\alpha=0.05$，接受区间的概率为：$1-\alpha=0.95$；查 t 分布表得临界值：$t_{\frac{\alpha}{2}}=t_{0.025}=2.4469$，故接受区间为：$[-2.4469,2.4469]$，而拒绝区域为：$(-\infty,-2.4469)\cup(+2.4469,+\infty)$。

（3）计算样本统计量：$S_y=\sqrt{\dfrac{\sum(y-\hat{y})^2}{n-2}}=\sqrt{\dfrac{44242.653}{6}}=85.87$，

$$S_b=\sqrt{\frac{S_y^2}{\sum(x-\bar{x})^2}}=\sqrt{\frac{85.87^2}{41.92}}=13.26277,$$

于是：$T=\dfrac{b}{S}=\dfrac{128.9599}{13.26277}=9.72345$

（4）做出判断。由于实际的统计量：$T=9.72345$ 落入拒绝区域，所以我们有理由拒绝原假设 H_0，而接受备择假设 H_1，即认为回归效果显著。

解法 2 （左单侧检验解法）

（1）建立假设。由于是左侧检验解法，即：

原假设: $H_0: \beta \geq 0$,

备择假设: $H_1: \beta < 0$。

(2) 对于给定的显著水平 $\alpha = 0.05$, $f_1 = 1$, $f_2 = n - 2 = 8 - 2 = 6$, 因为是左单侧检验,所以拒绝区间的概率为 $\alpha = 0.10$,接受区间的概率为: $1 - 2\alpha = 0.90$; 查 t 分布表得临界值: $\pm t_{\frac{\alpha}{2}} = \pm t_{0.025} = \pm 3.78$,故接受区间为: $[3.78, +\infty)$,而拒绝区域为: $(-\infty, 3.78)$

(3) 计算样本统计量: $S_y = \sqrt{\dfrac{\sum (y - \hat{y})^2}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{44242.653}{6}} = 85.87$,

$$S_b = \sqrt{\frac{S_y^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{85.87^2}{41.92}} = 13.26277,$$

于是: $T = \dfrac{b}{S} = \dfrac{128.9599}{13.26277} = 9.72345$

(4) 做出判断。由于实际的统计量: $T = 9.72345$ 落入接受区域,所以我们有理由接受原假设 H_0,而拒绝备择假设 H_1,即认为回归效果显著。

解法3 (右单侧检验解法)

(1) 建立假设。由于是右侧检验解法,即:

原假设: $H_0: \beta \leq 0$,

备择假设: $H_1: \beta > 0$。

(2) 对于给定的显著水平 $\alpha = 0.05$, $f_1 = 1$, $f_2 = n - 2 = 8 - 2 = 6$,

因为是右单侧检验,所以拒绝区间的概率为: $\alpha = 0.10$,接受区间的概率为: $1 - 2\alpha = 0.90$;

查 t 分布表得临界值: $\pm t_{\frac{\alpha}{2}} = \pm t_{0.025} = \pm 3.78$,故接受区间为: $(-\infty, 3.78]$,而拒绝区域为: $(3.78, +\infty)$

(3) 计算样本统计量: $S_y = \sqrt{\dfrac{\sum (y - \hat{y})^2}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{44242.653}{6}} = 85.87$,

$$S_b = \sqrt{\frac{S_y^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{85.87^2}{41.92}} = 13.26277,$$

于是: $T = \dfrac{b}{S} = \dfrac{128.9599}{13.26277} = 9.72345$。

(4) 做出判断。由于实际的统计量: $T = 9.72345$ 落入拒绝区域,所以我们有理由拒绝原假设 H_0,而接受备择假设 H_1,即认为回归效果显著。

3 结论

对与假设检验问题应注意一下几点:

(1) 做假设检验之前,应注意资料本身是否有可比性。

(2) 当差别有统计学意义时应注意这样的差别在实际应用中有无意义。

(3) 根据资料类型和特点选用正确的假设检验方法。

(4) 根据专业及经验确定是选用单侧检验还是双侧检验。

(5) 当检验结果为拒绝无效假设时,应注意有发生 I 类错误的可能性,即错误地拒绝了本身成立的原假设 H_0,发生这种错误的可能性预先是知道的,即检验水准那么大; 当检验结果为不拒绝无效假设时,应注意有发生 II 类错误的可能性,即仍有可能错误地接受了本身就不成立的原假设 H_0,发生这种错误的可能性预先是不知道的,但与样本含量和 I 类错误的大小有关系。

(6) 判断结论时不能绝对化,应注意无论接受或拒绝检验假设,都有判断错误的可能性。

(7) 报告结论时应注意说明所用的统计量,检验的单双侧及临界值的确切范围。

对于同一问题,使用单侧(左单侧、右单侧)与双侧检验都是可以的,结论应该是一样的,这样就消除了一部分学生对如何选择单侧与双侧及左单侧、右单侧检验类型的困惑,使得问题易于接受。 (下转第196页)

[9] 中国篮球协会官方网站. WCBA 球队球员 [EB/OL]. [2011－11－04]. http://www.cba.gov.cn/cbastats/wcba/teamplayer.aspx.

责任编辑: 程艳艳

Analysis on Characteristics of Athletes' Age, Years for Playing Basketball and Physique in WCBA during 2011－2012 Match Season

FENG Qi-ming

(Physical Education Department, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou 635000, China)

Abstract: The data statistic analysis on players' age, years for playing basketball and physique in WCBA during 2011－2012 match season is made by the methods of literature consultation and mathematical statistics. The results show that their average age is 22.70 years old, average years for playing basketball is 3.29 years, average height is 1.85 meters, average weight is 73.63 kgs and average Quetelet index is 397.37. There are no significant differences among guards, forwards and centers' years for playing basketball($P > 0.05$), while there are significant differences in their ages($P < 0.05$). Their average height, weight and Quetelet index are quite different($P < 0.01$).

Keywords: WCBA; basketball; player; age; years for playing basketball; physique

(上接第192页)

参考文献:

[1] 同济大学概率统计教研组. 概率统计 [M]. 上海: 同济大学出版社,2002.
[2] 盛骤,等. 概率论与数理统计 [M]. 北京: 高等教育出版社,2005.
[3] 黄良文,陈恩仁. 统计学原理 [M]. 北京: 中央广播电视大学出版社,1998.
[4] 王公达,张欧东. 市场调查 [M]. 上海: 复旦大学出版社,2009.
[5] 王升. 计量经济学导论 [M]. 北京: 清华大学出版社,2006.

责任编辑: 程艳艳

Analysis and Application of Hypothesis Testing Method

MA Feng-ming[a], WANG Zhong-li[b]

(a. Management School; b. School of Surveying and Prospecting Engineering,
Jilin Institute of Architecture and Civil Engineering, Changchun 130118, China)

Abstract: Hypothesis testing is an important method in statistics, also it is an important part of statistical inference. The types and methods of hypothesis testing are sometimes difficult to determine. The connotation of significance level becomes the keypoint in teaching. This paper makes a step analysis, showing that no matter what type of hypothesis testing in application, the conclusion should be consistent and the procedure of solving steps makes the problem easier to be accepted.

Keywords: hypothesis testing; statistics; analysis; application