

爱因斯坦与布朗运动的数学理论

杨 静¹,王丽霞²

(1.中国科学院 数学与系统科学研究院 中国科学院研究生院,北京 100080; 2.北京邮电大学 理学院 中国科学院 数学与系统科学研究院 中国科学院研究生院,北京 100080)

摘要:目的 考察和分析爱因斯坦(1879—1955)在1905年发表的布朗运动研究对数学的影响及历史意义。方法对原始文献进行综合分析。结果 爱因斯坦首次从理论和定量的角度对布朗运动进行了研究,这成为布朗运动理论数学化的起点。爱因斯坦巧妙地在物理学中运用数学,他的研究往往能引发数学和物理学中意想不到的结果。结论 这使科学上关于原子、分子非实在性的争论宣告结束,同时也创造了兼收并蓄的科学方法和思想。

关键词:爱因斯坦(1879—1955);布朗运动;原子论;随机过程

中图分类号:O112 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-274 (2006)01-0169-04

一般而言,新的数学学科源于人们探索世界而作的努力。布朗运动理论就是一个典型的例子。关于它的研究最初来自植物学家的观察,后经过物理学家的思考,最后被数学家抽象为严格的数学理论,成为随机过程理论中一个十分重要的过程。其中,爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955)对此做出了划时代的贡献。以前,人们主要探索布朗运动的机制,爱因斯坦则首次从理论和定量的角度对布朗运动进行了研究^[1]。这不仅是布朗运动数学严格化的起点,也在批判唯能论、建立分子、原子的实在性方面具有关键的作用。

1 爱因斯坦以前的布朗运动研究

1827年,英国植物学家布朗(Robert Brown, 1773—1858)在观察液体中某种植物的花粉颗粒时,观察到它在不断地作无规则运动。作为敏感的观察家,他没有轻易地放过这个偶然看到的现象。相反,他做了大量的实验来寻求颗粒运动的原因。

1828年,布朗将观察结果作为报告发表,后人简记为《植物花粉的显微观察》。在报告中,布朗指出:“当检查这些微粒在水中的形式时,我发现它们大多在明显运动。这种运动并不只是在液体中位置

的改变,这可以由它们的相对位置改变证实,而且还有微粒自身形式的改变。……在经过多次重复的观察以后,我确信这些运动既不是由于液体的流动也不是由于液体的逐渐蒸发所引起的,而是属于粒子本身的运动^[2]。其实,很早以前人们就知道液体中微粒的这种无规则运动,但是布朗是第一个对它进行科学研究的人^[3]。因此,这种运动后来被命名为“布朗运动”。

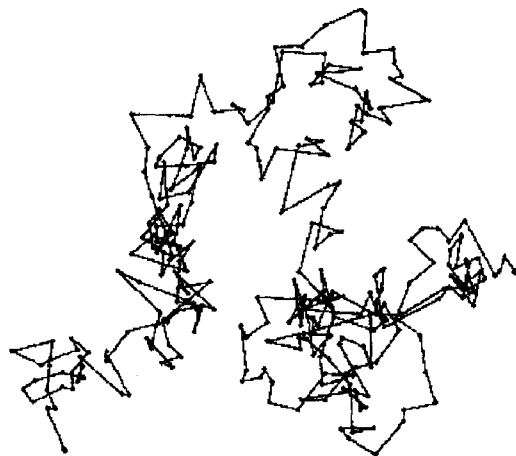


图1 布朗运动示意图

Fig 1 Sketch map of Brownian motion

布朗曾设想这种永不衰减的运动是一种生命物质所特有的现象,但是当他把无机物研细到足以悬

收稿日期:2005-09-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371119)

作者简介:杨 静(1977-),女,河北石家庄人,中国科学院博士生,从事近现代数学史研究。

浮在水中时,发现也可以见到这种现象,从而排除了这种假设。这样,布朗运动从生物王国转到了物理领域。

许多人尝试解释这个怪异的现象,相关的实验及研究结果数目极多,不胜枚举。布朗和当时的科学家们通过大量实验,推翻了一些错误的解释,阐明了几点事实。比如:布朗运动的速度与粒子大小成反比,越细小的粒子运动得越快;运动会随温度升高而加剧;当溶液的黏度降低时,运动会变得更活跃;运动不受液体蒸发的影响,因为观测时,密闭的器皿中如果盛满液体,液体就无从蒸发;运动与光线直射没有关系等等^[4]。但是,当时没人能给出一个令人信服的理论,说明到底是什么引起了这种不规则运动。

布朗运动的研究还没来得及展开,就逐渐沉寂下去。大约 50 年之后,才出现了一种对布朗运动的新的、定性描述。1877 年,德耳索(Delsaulx)正确指出,布朗运动是由于悬浮在液体中的颗粒受到周围的分子碰撞不平衡而引起的运动。但是,这只是一种叙述,没有形成理论,也未被实验证实。

2 爱因斯坦的布朗运动理论

直到 1905 年,爱因斯坦发表了论文《关于热的分子运动论所要求的静止液体中悬浮小粒子的运动》,这才首次从理论和定量的角度对布朗运动进行研究。他研究的目的是:要通过观测由分子运动的涨落现象所产生的悬浮粒子的无规则运动,来测定分子的实际大小,以解决半个多世纪来科学界和哲学界争论不休的原子是否存在的问题。爱因斯坦的文章主要考虑了两个问题:第一,布朗颗粒为什么运动?第二,布朗颗粒在一定时间内运动路径是多少?

爱因斯坦以范托夫(J. H. van t Hoff)的渗透理论和斯托克斯(Stokes)的流体动力学为基础^[3],证明布朗粒子的运动是由于液体分子从四面八方对它们的撞击引起的。这种撞击的不规则性和偶然性,使得来自不同方向的作用一般地说并不互相完全抵消;由于布朗粒子非常小(线度约为 10^{-4} cm),周围分子不均匀碰撞所产生的不平衡力的作用足以使它发生运动。实际上,由于物质是由有限多个原子所构成,宏观性质是微观性质的统计平均值,所以宏观性质会表现有统计平均所必然具有的涨落现象。这种涨落现象在布朗运动中表现得很明显^[5]。

需要指出的是,通常情况下,每个布朗颗粒在液

体中所受周围液体分子的碰撞,约有 10^{19} 次/s。在这样频繁的碰撞之下,颗粒的瞬时运动是无法观测的。我们所能观测到的只是在宏观短的时间内,颗粒的一种平均运动。所观测的布朗颗粒的位移不过是一种剩余的涨落而已^[5]。

在阐述了布朗运动的原因后,爱因斯坦转到“比较严格地研究由分子的热运动所引起的不规则运动”^[6],或者我们现在称作的一类随机过程。爱因斯坦假设每个粒子的运动都独立无关;同一个粒子在各个不同的时间间隔中的运动,都必须被看作是相互独立的过程。通过正确的数学推导,他得到了著名的关于扩散的微分方程 $\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (其中, D 是扩散常数),并求出了解

$$f(x, t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{t}}.$$

其结论是,在一个任意时间 t 中所产生的位移的相对分布正是同偶然误差的相对分布一样。这样得到的 $f(x, t)$,事实上就是将布朗运动看作是一个马尔可夫过程时的转移概率函数。接着,他借助这个方程立即求出一个粒子在 x 轴方向位移的均方根:

$$\lambda_x = \sqrt{x^2} = \sqrt{2Dt}.$$

因此,平均位移和时间的平方根成正比^[6]。这也就解决了布朗颗粒运动路径的问题。

3 爱因斯坦工作的影响和意义

如果从数学的角度看爱因斯坦的工作,那么可以总结成下述 3 条论断^[7]:

- 1) 布朗粒子在两个不同时间段内的运动互相独立。因此,无法由过去的运动预测未来的运动;
- 2) 布朗颗粒等可能地向任意方向运动,平均来看,它在一段时间内的位移与时间的平方根成正比;
- 3) 布朗粒子的运动轨迹是连续的。

在 1905 年,数学上令人满意的概率论尚未出现。因此,从数学角度来说,爱因斯坦的推导还是相当初步的。而且,爱因斯坦研究的目的是根据分子的运动来解释所观测到的物质的宏观热性质,也就是从物质的微观结构和微观运动来说明物质的宏观性质。这些微观假设的正确与否,最终还是需要实验的验证,因此他更侧重是否与现实符合,所以在文章最后还给出了阿伏伽德罗(Amedeo Avogadro, 1776—1856)常数的第一个准确测定公式

$$\lambda_x = \sqrt{t} \frac{\sqrt{RT}}{\sqrt{N}} \frac{1}{3\pi kP}.$$

其中, N 是阿伏伽德罗常数, λ_x 是平均位移, 其余量是已知的, 或用实验可以测得的。这样, 根据这个公式既可以预测平均位移, 也可以计算 N 。

虽然, 爱因斯坦没有发展出布朗运动的一般理论, 但是他的工作影响了数学家维纳 (N. Wiener, 1894—1964)。1913 年, 维纳访问剑桥大学时, 他的主要课程是跟随罗素 (Bertrand Russell, 1872—1970) 进行的, 这些课程当时给了维纳深刻的印象。但从长远来说, 这些影响还不如罗素向他推荐的一些补充读物。罗素看到了爱因斯坦相对论对科学哲学的重要意义, 曾建议维纳阅读爱因斯坦 1905 年发表的 3 篇论文, 其中有一篇论述布朗运动。正是在这个课题上, 维纳在随后的几年内做出了他最重大的数学成果之一^[8]。1923 年, 维纳发表了论文《微分空间》, 构造了布朗运动的数学模型, 成为研究布朗运动的一个里程碑。

同样, 对于布朗颗粒的行为进行统计, 爱因斯坦研究了布朗运动的统计性态, 他选择的实际上是可测的物理量: 颗粒的位移以及在一定层面颗粒的密度, 颗粒不管一个或多个都可以。维纳的思想则是把单个粒子的轨道当做一个集合中的一点来研究, 他选择的是一个 (或多个) 布朗颗粒所有可能运动的路线, 只假定这些路线服从概率规律。维纳所考虑的就是这些路线或函数的空间。他在爱因斯坦的模型基础上, 把物理模型抽去与实在相联系的具体内容, 而使其成为一个纯形式的躯壳时, 布朗运动就不是观测对象, 而是作为数学对象来研究, 从而得到了一种一般的随机过程, 而不再是一个特殊现象。这样, 维纳就把布朗运动从物理研究变成了数学研究。

爱因斯坦研究布朗运动的历史背景是当时科学界关于分子真实性的争论。这种争论由来已久, 从原子分子理论产生以来就一直存在。20 世纪初, 以物理学家和哲学家马赫 (Emst Mach, 1838—1916) 和化学家奥斯特瓦尔德 (Fridrich Wilhelm Ostwald, 1853—1932) 为代表的一些人再次提出对分子原子理论的非难, 他们从实证论或唯能论的观点出发, 怀疑原子和分子的真实性的。马赫认为, 单个原子或分子的任何效应不能直接观察到, 因而原子分子论是不可取的。“唯能论”认为能量是终极的实在, 自然界的一切过程本质上都是能量的转换。分子、原子和离子只是数学上的虚构, 不能提供物质本性的任何内容, 是“有害的假说”。关于分子原子实在性的争论成为科学前沿中的一个中心问题。

我们在上面已经指出, 爱因斯坦圆满地阐明了

布朗运动的根源及其规律性, 他也为证实分子的真实性的找到了一种方法。1908 年, 法国物理学家佩兰 (Jean Baptiste Perrin, 1870—1942) 用实验测定了布朗粒子的平均质量和平均半径, 并观测了布朗粒子在每隔 30 s 的位移平方的平均值, 得出了与爱因斯坦的理论相一致的结果。这一工作充足验证了爱因斯坦理论的可靠性, 为分子的真实存在提供了直观的、令人信服的证据, 这对基础科学和哲学有着巨大的意义。就在佩兰的实验公布的那年, 奥斯特瓦尔德主动宣称: “原子假说已经成为一种基础巩固的科学理论”^[9]。从此, 科学上关于原子和分子实在性的争论即告结束。

另外, 爱因斯坦的工作特点对我们在认识论上也有启发。纵观历史, 对待同一事物, 开始往往有不同的观点, 有些看来甚至是矛盾的, 怎样对待以前的理论学说呢? 历史上有过两种解决办法: 一种是调和、折中; 二是历史的方法, 就是把科学认识看成是一个发展的过程。从这样的观点来看, 各种认识论都只描述了这个过程的一些阶段或环节, 它们都具有一定的真理性, 但从总体上看却是片面的。爱因斯坦倡导的兼收并蓄的科学方法和思想, 正是后一种方法^[10]。比如, 他研究布朗运动的两块基石是斯托克斯流体动力学和范托夫的渗透理论。前者假设, 液体是连续的媒介, 它附着在固体表面, 因为固体与液体摩擦, 由此产生黏滞性。后者则没有提到黏滞性。当时许多人认为这两个理论互相排斥, 但是爱因斯坦把它们大胆地结合起来用于自己的研究。由此可见, 正确的科学认识观对科学家是多么重要。

由于爱因斯坦在同一年还发表了更有影响的量子理论、相对论方面的革命性论文, 以致对有关布朗运动的介绍相对较少。但是, 爱因斯坦的这一成就, 不仅是布朗运动的数学理论中无法略去的一笔, 在现代物理学中也占有重要地位。

参考文献:

- [1] 飞田武幸. 布朗运动论 [M]. 蔡聪明译. 北京: 世界图书出版公司, 1992
- [2] BROWN R. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies[M] BENNETT J J. The Miscellaneous Botanical Works of Robert Brown London: Hardwicke, 1866: 465-479.
- [3] KAHANE J P. A century of interplay between Taylor se-

- ries, Fourier series and Brownian motion [J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1997, 29 (3): 257-279.
- [4] 高昌达. 布朗氏运动与分子学说 [J]. 学艺, 1925, 6 (4): 3-4.
- [5] 王竹溪. 统计物理学导论 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1965: 1; 216.
- [6] 文集编委会. 爱因斯坦文集. 第 2 卷 [M]. 范岱年等译. 北京: 商务印书馆, 1977: 72-83.
- [7] JERISON D, STROOCK D W. Norbert Wiener [M]. JERISON D, SINGER IM, STROOCK D W. The Legacy of Norbert Wiener. New York: American Mathematical Society, 1997: 8-10.
- [8] 莱文生. 维纳传 [M]. 中国科学院自然科学史研究所数学史组, 中国科学院数学研究所数学史组主编. 数学史译文集续集. 上海: 上海科学技术出版社, 1985: 54.
- [9] 李艳平, 申先甲. 物理学史教程 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 177.
- [10] 解恩泽, 徐本顺. 世界数学家思想方法 [M]. 济南: 山东教育出版社, 1991: 1 221.
- (编辑 姚 远)

A. Einstein and the mathematical theory of Brownian Motion

YANG Jing¹, WANG Li-xia²

(1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science; Graduate School of the Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China; 2. Science School, Beijing University of Posts and Telecommunications; Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: **Aim** To review and analyze the significance and influence of the Brownian motion work done by A. Einstein in 1905 on mathematics. **Methods** Comprehensive analysis of the original literatures. **Results** Einstein first studied Brownian motion from the theoretical and quantitative point, and his work is the beginning of mathematical theory of Brownian motion. **Conclusion** Einstein's researches always inspired amazing results in mathematics and physics, by applying subtly mathematics to physics.

Key words: A. Einstein (1879—1955); Brownian motion; atomism; stochastic process

· 学术动态 ·

陈超博士获首届华侨专业人士“杰出创业奖”

我校陈超博士日前获得首届华人华侨专业人士“杰出创业奖”。

首届华人华侨专业人士“杰出创业奖”是由国务院侨务办公室设立,旨在表彰回国创业中取得突出成绩的华侨华人专业人士。首批获奖者共 100 人,绝大多数为改革开放后出国留学,学成后留居当地的新华侨华人。近 10 余年来他们先后回国创业,在各自的领域取得了优异成绩,对中国科技、经济发展做出了重要贡献。

最近,国务院侨务办公室在北京人民大会堂举行首届华侨华人专业人士“杰出创业奖”表彰大会。经陕西省侨务办公室推荐,我校生物芯片研发中心主任、国家微测系统工程研究中心主任、陕西西大北美基因股份有限公司董事长陈超博士因在生物科技方面做出的贡献,成为陕西省受到表彰的 4 人之一,也是我校唯一获此殊荣的华侨。

(高立勋)