论《九章算术》和中国古代数学的特点*

王工一

(衢州学院(筹)教务处,浙江 衢州 324000)

摘要:《九章算术》是我国古代数学园地中的一朵奇葩,是中国古代数学的典型代表。从《九章算术》可以看出我国古代数学具有的特点是:实用性;算法化;模型化;数形结合、直觉把握;寓理于算。

关键词:《九章算术》;中国古代数学;数学史

中图分类号:O112 **文献标识码**:A **文章编号**: 1008 - 6749(2006)02 - 0081 - 04

Features of Chinese Ancient Mathematics and "*Arithemetic in Nine Sections*"

Wang Gongyi

(Department of Teaching Affairs, Quzhou College, Quzhoug Zhejiang 324000, China)

Abstract: "*Arithemetic in Nine Sections*" is a shining star in the ancient mathematics in China. It is a typical representative is Chinese traditional mathematics. Features of Chinese ancient mathematics can be seen in it: practicality; being arithmetic; being models; connecting mathematics with graphs and grasping intuitively; involving principle into arithemetic.

Key words: "*Arithemetic in Nine Sections*"; Chinese traditional mathematic; history of mathematics

《九章算术》历来被奉为"中国古算经之首",是中国古代数学的典型代表。日本数学史家小仓金之助认为:《九章算术》是"中国的欧几里得","如果同希腊数学进行一番比较的话,几何与数论虽不如希腊,可是我确信算术和代数则凌驾于希腊之上。"[1]本文借助《九章算术》之"一斑"而窥中国古代数学特点之"全豹"。

1 实用性

《九章算术》收集的 246 个问题都是与生产实践有联系的应用题,以解决问题为目的。从《九章算术》开始,中国古典数学著作的内容,几乎与当时社会生活的实际需要有着密切的关系。这不仅表现在中国的算学经典基本上都遵从问题集解的体例编纂而成,而且它所涉及的内容反映了当时社会政治、经济、军事、文化等方面的某些实际情况和需要,以致史学家们常常把古代数学典籍作为研究中国古代社会经济生活、典章制度(特别是度量衡制度),以及工程技术(例如土木建筑、地图测绘)等方面的珍贵史料。而明代中期以后兴起的珠算著作,所论则更是直接应用于商业等方面的计算技术。中国古代数学典籍具有浓厚的应用数学色彩,在中国古代数学发展的漫长历史中,应用始终是数学的主题,而且中国古代数学的应用领域十分广泛,著名的十

* **收稿日期**:2005 - 10 - 27
基金项目:浙江省精品课程项目(2005180)
作者简介:王工一(1966 -),男,浙江建德人,副教授,硕士。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

大算经清楚地表明了这一点,同时也表明"实用性"又是中国古代数学合理性的衡量标准。这与古代希腊数学追求纯粹"理性"形成强烈的对照。其实,中国古代数学一开始便同天文历法结下了不解之缘。正如李约瑟博士所说:"读到社会因素时,很明显的是,在整个中国历史中,数学的重要性主要是在于它与历法有关。在《畴人传》中很难找到一个数学家不受诏参与或帮助那个时代的历法革新工作。"中算史上许多具有世界意义的杰出成就就是来自历法推算的。例如,举世闻名的"大衍求一术"(一次同余式组解法)产生于历法上元积年的推算,由于推算日、月、五星行度的需要,中算家创立了"招差术"(高次内插法);而由于调整历法数据的要求,历算家发展了分数近似法。[2]所以,实用性是中国传统数学的特点之一。并且这个实用性主要是为服务于统治阶级的需要。李约瑟博士曾说过:从它的社会根源来看,它与官僚政府组织有密切关系,并且专门致力于统治官员所要解决的(或教导别人去解决的)问题。土地的丈量、谷物容积、水坝和河渠的修建、税收、兑换率——这些似乎都是最重要的实际问题,"为数学"而数学的场合极少。

2 算法化

在实用思想指导下,古代中国人习惯于把问题数值化、离散化,利用具体的数值计算来解决一系列复杂的应用问题或理论问题。这种计算思想重视的是构造出可利用算筹计算的算法。中国传统数学实用性的特征,决定了它的发展是以解决实际应用问题和提高计算技术为其主要目标。我国传统数学是沿着注重从实践经验中产生和发展数学的思维方式发展数学的,擅长于算。这与西方许多国家发展数学的道路是不同的。中国传统数学思想有着自己的渊源和模式。在初等数学领域之内,正是这种传统数学思想把我国数学推向世界的最高峰,许多国家与我国相比,望尘莫及。弗莱登塔尔说过:"任何思辩的新生事物都在自身中包含着算法的萌芽,这是数学的特点。计算曾是一门科学,在它机械化后,数论才能茂盛。如果没有微积分的算法,分析也永远不会发展。算法化意味着巩固,意味着由一个平台向更高点的跳跃,算法为更深的发掘提供技巧……"[3]

中国传统数学本质上是一种构造性数学,数学对象及结果基本上均可由固定的演算程序经有限步骤得到,各种计算均依固定的演算程序进行,发展起一套程序化、机械化的算法体系。《九章算术》的主要内容是术,而每一个术都是由带有具体数值的一些具体问题引出,术实际上是处理相应数值的算法,它可以在古代中国长期使用的计算工具——算筹上机械地进行,其中的很多算法可以容易地转化成现代的计算机语言。例如,"方田"章的"约分术"原文为:

"又有九十一分之四十九,问约之得几何。

答曰:十三分之七。约分术曰:可半者半之,不可半者,副置分母子之数,以少减多,更相减损,求其等也,以等数约之。"

这个"术"的意思是,若分子、分母全是偶数,则可用2约简;若分子、分母不全是偶数,则可以把分子、分母(表示它们的算筹)置于不同的地方,然后由较大的数减去较小的数,并辗转相减直到两边所得的数相等,就用这个数(等数)来约分。这个等数实际上就是分子和分母的最大公约数。所以"约分术"就是求两数最大公约数的一个算法,可将其转化为如下的BASIC语言来求解:

```
10  INPUT  A,B
20  WHILE  A< > B
30  IF  A<B  THEN  SWAP  A,B
40  A=A-B
50  WEND
60  PRINT  A
70  END
```

有人曾经将中国传统数学与今天的计算技术对比,认为算筹相应于电子计算机可以看做"硬件",那么中国古代的"算术"可以比做电子计算机计算的程序设计,是一种软件的思想。这种看法是很有道理的。中国的筹算不用运算符号,无须保留运算的中间过程,只要求通过筹式的逐步变换而最终获得问题的解答。因此,中国古代数学著作中的"术",都是用一套一套的"程序语言"所描写的程序化算法。各种不同的筹法都有其基本的变换法则和固定的演算程序。中算家善于运用演算的对称性、循环性等特点,将演算程序设计得十分简捷而巧妙。如果说古希腊的数学家以发现数学的定理为目标,那么中算家则以创造精致的算法为已任。这种设计等式、算法之风气在中算史上长盛不衰,清代李锐所设计的"调日法术"和"求强弱术"等都可以说是我国古代传统的遗风。

与《九章算术》一脉相承,中国古代的数学理论、数学成果都用算法表述,数学的发展主要表现为算法的改进和扩展。[4]例如宋代秦九韶的"大衍求一术"和"正负开方术"作为算法的"计算程序"具有很高的机械程度,并包含了现代计算语言中构造非平易算法的基本要求(如循环语句、条件语句)与基本结构(如子程序)。由算法化思想,决定了"中国古代数学具有2大特色,一是它的构造性,二是它的机械性","是可以直接施用之于现代计算机的数学"。[5]

中国古代数学称为"算术",其原始意义是运用算筹的技术。"算术"这个名称恰当地概括了传统数学算法化的特点。具体地说,算法化是指:以算为主,使用算器,建立一套算法体系。

中国古代数学一开始就和算器的应用密不可分,算筹是在计算机发明以前我国所独创并且是最有效的计算工具。中国古代计算技术的发达可以说是受惠于算筹的。我国很早就使用十进位制记数法,便与筹的使用密切相关。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

先进的计算法与计算工具使中国古代在计算技术方面居于世界遥遥领先的地位,筹算以后发展为珠算。明代以后珠算广泛应用于商业等实际部门,使中国传统数学依赖算器,发展计算技术的特点表现得更为充分。

中国古代的筹算不限于单纯的数值计算,而是发展了一套内容十分丰富的"筹式"演算。中算家不仅利用筹码不同的"位"来表示不同的"值",发明了十进位制记数法,而且还利用筹在算板上各种相对位置排列成特定的数学模式,用以描述某种类型的实际应用问题。例如列衰、盈朒、"方程"诸术所列筹式描述了实际中常见的比例问题的实际应用问题,而天元、四元诸式,则刻画了高次方程问题。演算对象由"数"发展到"式",即由数量进到数量关系的研究,后者具有更一般的代数性质。筹式以不同的"位"代表不同的"量",以不同的位置关系表示特定的数量关系,在这些筹式所规定的不同的"位"上,可以布列任意的数码(它们随着实际问题的不同而取不同的数值),因而,筹式本身就具有代数符号的性质。可以认为,中国古代的筹式就是一种特殊的代数符号系统。

古代数学大体可以分为 2 种不同的类型:一种是长于逻辑推理,一种是发展计算方法。这也大致代表了西方和东方 2 类数学的不同特色。虽然以算为主的某些特点也为东方的古代印度数学和中世纪的阿拉伯数学所具有,但是,中国传统数学在这方面更具有典型性。中算对于算具的依赖性和形成一整套程序化的特点尤为突出。例如,印度和阿拉伯在历史上虽然也使用过土盘等算具,但都是辅助性的,主要还是使用笔算,与中国长期使用的算筹和珠算的情形大不相同,自然也没有形成象中国这样一贯的与"硬件"相对应的整套"软件"。[2]

3　模型化

《九章算术》中大多数问题都具有一般性解法,是一类问题的模型,同类问题可以按同种方法解出。其实,以问题为中心、以算法为基础,主要依靠归纳思维建立数学模型,强调基本法则及其推广,是中国传统数学思想的精髓之一。中国传统数学的实用性,要求数学研究的结果能对各种实际问题进行分类,对每类问题给出统一的解法;以归纳为主的思维方式和以问题为中心的研究方式,倾向于建立基本问题的结构与解题模式,一般问题则被化归、分解为基本问题解决。由于中国传统数学未能建立起一套抽象的数学符号系统,对一般原理、法则的叙述一方面是借助文辞,一方面是通过具体问题的解题过程加以演示,使具体问题成为相应的数学模型。

当然,这种数学模型和现代数学教育讲的数学模型有一定的区别,现代意义的数学建模是指:根据生产、生活中遇到的实际问题的特点和规律,抽象和提炼出一个数学问题,用数学的工具,包括计算机、信息查询等手段来求解,并将结果经解释验证后用于解决实际问题,指导生产、生活的过程。而中国古代的数学模型则是用以揭示一般方法的具体问题与解题模式,接近于现代的应用性模型,二者表面上虽不一致,但本质上是相通的。[6]

4　数形结合、直觉把握

数和形是数学中最基本的原始概念,《九章算术》开创了中国古代数学中数形结合的独特的研究方法。其表现为,用数的计算来解决形的研究的若干理论问题,如"方田"、"商功"章的种种平面图形和立体图形的求积问题,都用数的计算,即着重于考察图形中数的关系,算出确定的数值,来得出积与边、高、径长的关系。同时,也用形的直观来解释数的算法,如对"开方术"、"开立方术"等,为以图形作解释打下基础(实际的解释是刘徽完成的,借助于面积和体积的图解对开平方和开立方作了通俗易懂的说明,在刘徽的注文中,更发展为"析理以释、解体用图"的系统方法)。

其实,中国传统数学由于没有像古希腊那样经历不可通约量造成的危机,一直保持着形数结合的传统,许多典型的算术与代数方法(如比率算法、高次方程数值解法)在几何学领域都有广泛应用,而几何学的原理与方法又被成功地用于代数、数论等领域。[6]如刘徽运用割补法对整勾股数公式的论证,祖暅利用八分之一牟合方对球体公式的阐说,梅文鼎借鳖臑而论球面三角形的边角关系,明安图创割圆密率捷法,运用几何方法对初等函数级数展开的研究等等。[7]

数形结合的思想有助于数学的各个领域的融会贯通,有助于发挥数学思维的整体性,使之更为深刻、灵活,是现代数学教学中强调的基本数学思想之一。正如拉格朗日所说的那样:当"数"和"形"分道扬镳的时候,数学的进展就缓慢,应用也有限。但是,一旦它们联袂而行,它们就互相从对方吸收新鲜的活力,从而大踏步地走向各自的完美。

《九章算术》中的"术"是从何而来?怎样保证其正确性?其根据何在?书中都未作出解释,更未给予推导、证明,可以认为,"'术'是在人们对算筹,尤其是运筹动作的直觉把握的基础上得出来的:采用某种方法运算,就可得出某种结果,以对运算动作直觉把握的某种信息来保证其正确性。而运筹动作又是建立在人的经验基础上的,因而通过算筹和运筹动作的直觉把握是在经验的基础上实现的。"[4]这种直觉把握是一种直觉方法,它是具有意识的人脑对客观对象(结构及其关系)的某种直接的领悟和洞察,是在"躬行"之后"悟"得结果,具有自由性、灵活性、自发性、偶然性、不可靠性等特点,是很难言语道断的。直觉方法也是一种创造性思维方法,它对人们在经验基础上的创造具有重要作用,这可以说是中国古代数学取得一系列重要成就的原因之一。直觉方法与逻辑思维方法同等重要,偏离任何一方都会制约一个人思维能力的发展,伊思·斯图尔特曾经说

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

过这样一句话:“数学的全部力量就在于直觉和严格性巧妙地结合在一起,是受控制的精神和富有灵感的逻辑。”受控制的精神和富有灵感的逻辑正是数学的魅力所在,也是数学教育者努力的方向。

5 寓理于算

由于中国传统数学注重解决实际问题,而且因中国人综合、归纳思维的决定,所以中国传统数学不关心数学理论的形式化。“从我国古代流传下来的许多科技文献也可以看出,大多数所谓科技著作都属于对当时生产经验的直接记载或者是自然现象的直接描述,除猜测性的议论之外,极少有严格深入的理论性探讨和科学的表述……古代数学只是长于解实际应用题,对基本数学概念、定理的讨究则十分鲜见。”[8]中国古代数学思想强调的最终目标是得到好的算法,至于如何得到这些算法的推理过程就被大量地省略了,如《九章算术》对其收入的246个与农业、手工业、商业、建筑等实际问题有直接联系的问题,书中作了许多解法与规则,但却没有相应的理论阐述和证明。在著名的《孙子算经》中,出现了被称为“中国剩余定理”的最古老例子“孙子问题”:“今有物不知其数,三三数之,剩二;五五数之,剩三;七七数之,剩二;问物几何?其解法为:“三三数之剩二,置一百四十;五五数之剩三,置六十三;七七数之剩二,置三十。并之,得二百三十三,以二百一十减之,即得”。其中也没有任何对解题思路的阐述。不过,中国数学的算法中也蕴涵着部分建立这些算法的理论基础,典型的例子如:赵爽用勾股圆方图对勾股定理及若干勾股恒等式所作的论述,他仅用了短短500字和6张附图,就“简练地总结了后汉时期勾股算术的辉煌成就。不但勾股定理和其他关于勾股弦的恒等式获得了相当严格的证明,并且对二次方程解法提供了新的意见”。[9]另外,中国数学家习惯把数学概念与方法建立在少数几个不证自明、形象直观的数学原理之上,如代数中的“率”的理论,平面几何中的“出入相补”原理,立体几何中的“阳马术”、曲面体理论中的“截面原理”(或称刘祖原理,即卡瓦列利原理)等等。

但是中国传统数学还是没有形成自己的理论体系,这对数学的后世发展是不利的。如秦九韶、朱世杰等人的著作中的一些问题,现在理解起来尚有争议,更不用说当时了。这使人们不能按一定的逻辑体系把握整个知识,降低了后人进一步研究的兴趣。顾应祥对《测圆海镜》的研究没有达到原书的高度,除了他个人的水平外,《测圆海镜》自身表述的逻辑性不强、可理解性较差也不能不说是一个重要原因。[10]事实上,中国古代数学对理论的轻视,也是造成近代数学,以致近代科技未能首先在中国创立的重要原因之一。

参考文献

[1]小仓金之助.数学史研究:第1辑[M].东京:岩波书店刊行,昭和十年.192

[2]李继闵.试论中国传统数学的特点[A].见:吴文俊.中国数学史论文集(二)[C].济南:山东教育出版社,1986:9～13

[3]弗莱登塔尔.作为教育任务的数学[M].陈昌平,唐瑞芬,等编译.上海:上海教育出版社,1995.35

[4]孙宏安.《九章算术》思想方法的特点[J].辽宁师范大学学报(自然科学版),1997,20(4):286～291

[5]吴文俊:从数书九章看中国传统教学构造性与机构化的特色[A].见:秦九韶与数书九章[C].北京:北京师范大学出版社,1987.74～75

[6]刘洁民.对中国古代数学教育的再认识[J].学科教育研究,1999,(4):26～28.

[7]王法发,陈建兰.论《周易》对中国古代数学思维模式的影响[J].兰州大学学报(社会科学版),2001,29(1):62～67

[8]王汝发.关于《九章算术》与近代数学的几个问题[J].北京化工大学学报(社会科学版),2001,35(4):33～38.

[9]钱宝琮.中国数学史[M].北京:科学出版社,1964.1

[10]赵彦超,张春虎.中国传统数学的辉煌与衰废[J].衡水师专学报,2003,5(4):35～37

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net