文章编号：1009-7171(2003)04-0047-03

三次数学危机与悖论

兰 林 世
(集宁师专 马列部 内蒙古 集宁 012000)

摘 要 悖论的发现,给数学界以极大的震动,相继导致了数学史上的三次危机。为了探求其根源和解决难题的途径,数学界、逻辑界进行了不懈的探讨,提出了一系列解决方案,并在不知不觉中大大推动了数学和逻辑学的发展。本文就悖论与数学危机的产生、悖论的根源以及悖论对数学科学的影响提出一些看法。

关键词 . 数学危机；悖论；毕达哥拉斯；芝诺；罗素；根源；影响
中图分类号：B812.5　　**文献标识码**：C

一、数学危机与悖论

危机是一种激化的、非解决不可的矛盾。从哲学角度看，矛盾是无处不在、不可避免的，即使是以确定无疑著称的数学也不例外。数学领域存在大大小小的诸多矛盾，如正数与负数、加法与减法、微分与积分、有理数与无理数、实数与虚数等。但在整个数学发展过程中还存在许多更为深刻的矛盾：有穷与无穷、连续与离散，乃至存在与结构、逻辑与直观、概念与计算等等。数学的发展史贯穿着矛盾的斗争和解决，而在矛盾激化到涉及整个数学的基础时，就会产生数学危机。

“悖论”一词源于希腊文，意为“无路可走”，转义为“四处碰壁”，无法解决的问题，实际上是一种特殊的逻辑矛盾，它是这样一种命题：设该命题为真，则可以推出它为假；反之设该命题为假，则又可推出它为真。如著名的“说慌者悖论”：公元前六世纪，克里特岛上的一位哲学家伊皮门尼德曾说了一句话“所有克里特岛人都是说慌者”。公元前四世纪麦加学派的欧布里德把它改造成“我正在说的话是假的”(A)。假定语句A是真的，即“我正在说的话是假话“是真的，那么它便是假的；反之，假定语句A是假的，即“我正在说的是假话”是假的，那么它就是真的。总之，由语句A真可以推出它为假，又由语句A假可以推出它为真，进而推出A既真又假的逻辑矛盾。

数学科学历来被视为是严格、和谐、精确的典型学科，但数学的发展从来不是直线式的，它的体系并不是永远和谐的，而常常出现悖论，特别是一些重要悖论的产生，自然引起人们对数学基础的怀疑以及对数学可靠性信仰的动摇。数学史上的三次危机皆由数学产生悖论而引起。悖论虽然看似荒诞，但却在数学史上产生过重要影响，一些著名的悖论曾使高明的数学家和逻辑学家为之震惊，并引发人们长期艰难而深入的思考。可以说悖论的研究对促进数学科学的发展是立过汗马功劳的。

二、数学史上的三次危机都与悖论有关

第一次数学危机产生于公元前五世纪因不可通约量的发现所出现的毕达哥拉斯悖论。当时毕达哥拉斯学派重视自然及社会中的不变因素的研究，把几何、算术、天文、音乐称为“四艺”，在其中追求宇宙的和谐规律性。他们认为：宇宙中的一切事物都可归结为整数及整数之比。毕达哥拉斯学派的一项重大发现是证明了勾股定理，但由此也发现了一些直角三角形的斜边不能表示成整数或整数之比(不可通约)。如直角边长均为1的直角三角形就是如此。这一悖论直接触犯了毕氏学派的根本信条，导致了当时认识上的危机。这次数学危机对古希腊的数学观点有极大的冲击。这表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及其比来表示，反之数却可以由几何量表示出来。整数的权威地位开始动摇，而几何学的身份升高了。危机表明,直觉和经验不一定靠得住,推理证明才是可靠的,从此希腊人开始重视演绎推理,并由此建立了几何公理体系,这不能不说是数学思想史上的一次巨大革命。

第二次数学危机由无穷小量引发。人类最先是以绳记事而识数，并以此测长度、算田亩、测积等，在一些不规则的图形等计算时，首次发现“无穷小”与“很小很小的量”的矛盾地。因古希腊的欧多克斯引入量的观念来考虑连续变动的东西，并完全依据几何来严格处理连续量。这造成数与量的长期脱离。古希腊的数学除了整数之外,并没有无理数的概念,连有理数的运算也没有,可是却有量的比例。但他们对于连续与离散的关系很有兴趣,尤其是芝诺提出的四个著名的悖论：

“两分法”：向着一个目的地运动的物体，首先必须经过路程的中点，然而要经过这点，又必须先经过路程的1/4点；要经过1/4点又必须首先通

收稿日期:2003-10-10

过1/8点等等。如此类推，以至无穷。结论是：无穷是不可穷尽的过程，运动是永远不可能开始的。

“阿基里斯追不上乌龟”：阿基里斯是《荷马史诗》中善跑英雄。奔跑中的阿基里斯永远无法超过在他前面慢慢爬行的乌龟。因为他必须首先到达乌龟的出发点。而当他到达那一点时，乌龟又向前爬行了一小段。等他完成了这一段路程，而乌龟又向前爬行了一段……乌龟必定总是跑在前头。这同两分法悖论所不同的是不必把所需的路程“一再平分”。

“飞矢不动”：飞着的箭在任何瞬间都是既非静止又非运动的。如果瞬间是不可分的，箭就不可能运动，因为如果它动了，瞬间就立即是可以分的了。但是时间是由瞬间组成的，如果箭在任何瞬间都是不动的，则箭总是保持静止。所以飞出的箭不能保持运动状态。

“操场或游行队伍”：A、B两件物体以等速向相反方向运动。从静止的C看来，比如说，A、B都在一小时内移动了2公里,可是从A看来，则B在一小时内就移动了4公里。由于B保持等速移动,所以移动2公里的时间是移动4公里时间的一半。因而一半的时间等于两倍的时间。

尽管我们凭直觉很容易否定芝诺悖论的结论，但芝诺所揭示的矛盾是深刻而复杂的。前两个悖论诘难了关于时间和空间无限可分,因而运动是连续的观点；后两个悖论诘难了时间和空间不能无限可分，因而运动是间断的观点。从某种程度上，芝诺悖论的出现预言了两千年后，将会围绕微积分的出现而爆发的第二次数学危机。这也说明，希腊人已看到无穷小与“很小很小”的矛盾。当然他们无法解决这些矛盾。

古希腊人虽然没有明确的极限概念,但他们在处理面积体积的问题时，却有严格的逼近步骤，这就是所谓的穷尽法。它依靠间接的证明方法，证明了许多重要而难证的定理。到了十六、七世纪,除了求曲线长度和曲线所包围的面积等类问题外，还产生了许多新问题，如求速度、求切线，以及求极大、极小值等问题。经过多年努力，终于在十七世纪晚期，形成了无穷小演算——微积分这门学科，这也是数学分析的开端。

由于运算的完整性和运算范围的广泛性,使微积分成为解决问题的重要工具。同时关于微积分基础的问题也越来越严重。以求速度为例，瞬时速度是$\Delta s/\Delta t$，当Δt趋向于零时的值。Δt是零?是很小的量?还是什么东西?这个无穷小量究竟是不是零？这引起极大的争论,从而引发了第二次数学危机。这次危机使数学更深入地探讨数学分析的基础——实数论的问题。这不仅导致集合论的诞生,并且由此把数学分析的无矛盾性问题归结为实数论的无矛盾性问题,而这正是二十世纪数学基础中的首要问题。

第三次数学危机是由1897年的突然冲击而出现的。到现在虽然已超过一个多世纪,但从整体来看,还没有解决到令人满意的程度。这次危机是由于康托的一般集合理论的边缘发现悖论造成的。由于集合概念已渗透到众多的数学分支,并且集合论在实际上已经成为了数学的基础,因此集合论中悖论的发现自然地引起了对数学的整个基本结构有效性的怀疑。

1897年意大利数学家布拉里．福尔蒂揭示了集合论的第一个悖论。两年后康托发现了很相似的悖论。这两个悖论只涉及到集合论中的结果，没有引起当时数学家们的足够重视。但罗素于1901年5月发现了一个悖论，它除了涉及集合概念本身外不需要别的概念。

罗素悖论曾被以多种形式通俗化。其中最著名的是罗素于1919年提出的,它涉及到某村理发师的困境。理发师宣布了这样一条原则：他给所有不给自己刮脸的人刮脸，并且只给村子里这样的人刮脸。当人们试图答复下列疑问时，就认识到了这种情况的变化性质：“理发师是否自己给自己刮脸？”。如果他自己给自己刮脸，那么就不符合他的原则，就不应给自己刮脸；如果他不给自己刮脸，那么按他的原则就该为自己刮脸。罗素悖论使整个数学大厦动摇了。它的“破坏力”不仅局限在数学领域，只要把此悖论的陈述略加修改，即用逻辑术语来代替集合论中的术语，罗素悖论就可以推广到逻辑领域。这样罗素悖论就不仅触及到数学的基础理论本身，它涉及到了一向被认为极为严谨的两门科学——数学和逻辑学。

罗素还提出过与“理发师悖论”相似的几个悖论,数学上将这此悖论称为“罗素悖论”或“集合论悖论”。用集合论中的数学语言描述为：

在某一非空全集中，有这样一个确定的集合，这个集合中“只有不属于这个集合的元素”。那么全集中的某一个指定元素和这个确定集合之间是什么关系呢？不难分析,如果这个元素包含于这个集合的话，那么根据这个集合的定义，这个元素就应该是“不属于这个集合的元素”;可如果这个元素“不属于这个集合”，那么根据这个集合的定义，这个元素就应该在这个集合中：即包含于这个集合。这就是说，全集中的每一个元素，与这个确定集合之间都不存在确定的包含关系，这无疑是讲不通的。

自从康托创立了数学领域中的“集合论”，用集合论中的观点来诠释各个数学概念之间的逻辑关系，可谓是“天衣无缝”，因此集合论也被誉为数学大厦的基石。然而罗素悖论的发现，证明了集合论中竟然存在自相矛盾的悖论，这足以暴露集合论本身的缺陷。

由罗素悖论引发的第三次数学危机，导致了一场关于数学基础问题的大论战，这场论战持续了 30 多年，大大推动了数学科学的发展。其中产生的“公理集合论”克服了朴素集合论中的罗素悖论的缺陷。

三、悖论的根源

悖论的产生既有认识论方面的因素，也有方法论和逻辑方面的因素。产生悖论，一方面是由于我们的思想不能正确地认识客观世界的一些未知事物及其规律，而受某些因素的影响产生了对这些未知事物或规律的错误认识。再以这种错误的认识为基础，作出一些错误的假定或结论，并在承认其它一切正确认识的前提下，把这种错误的结论认定为正确的，从而形成一种既符合实际又不符合实际的自相矛盾的悖论。当人们对悖论命题进行论证时，往往是先将错误的结论假定为真，这时以正确的认识为论据必然会推出矛盾；但转而又将错误的认识假定为假，而又以错误的结论作为推证依据，而假定的错误结论为假必定于错误的结论相矛盾，因而必然推出矛盾结果。于是假定结论为真会导致矛盾，假定结论为假也会导致矛盾，最终成为不可理解的悖论。

另方面，因为时间和空间是无限的，这就决定了人的认识也必然是无限的，任何已经建立起来的理论都是相对真理，都有认识上的局限性，从而只能适应于一定范围，超出了这个范围，就构成主客观矛盾，在这一条件下，这种矛盾就可能变为悖论。

从方法论观点看，是人们认识客观世界的方法与客观规律的矛盾。如在罗素悖论中，“不包含自己的集合”具有无限扩张的性质，“不包含自己的集合的集合”也就无法形成。罗素悖论间接反映了无限集合的完整性和可扩张性的辨证矛盾。

从逻辑方面看，逻辑真理和任何真理一样，既是绝对的，又是相对的，人们任何时候都无法穷尽逻辑真理，作为其表述的逻辑关系可以是多种多样的，悖论是相对于一个理论系统而言的，如果该系统的推理规则与客观实在相违背也可能出现悖论，如果将逻辑规律视为思维活动的普遍适用原则，并用于无限的场合，就可能犯错误。

四、悖论对数学科学发展的重要影响

数学悖论是在数学学科理论体系发展到相当高的阶段才出现的，是对数学学科理论体系可能存在的内在矛盾的揭示，是该理论体系的发展陷入某种危机的表现。因此，悖论的出现，往往会使人们对该理论体系的信念产生动摇，引起思想混乱，甚至悲观失望。对正常的科学研究活动形成一定程度的冲击。毕达哥拉斯悖论的出现，就曾彻底动摇了“数即万物”的世界观，给当时古希腊的数学家带来了极大的思想混乱，甚至恐慌和愤怒。该悖论的提出者被一群“数即万物”的捍卫者抛到海中活活淹死。但重要的是悖论的出现会有助于促进新理论的建立，有助于原有理论的进一步严密、完善，从而极大地促进数学科学的发展。

正是毕达哥拉斯悖论的发现，诱发了数学史上第一次数学基础的危机，导致无理数的引入，从而使数的概念发生了深刻的变革。无穷小量悖论的发现，曾引起数学界长达两个世纪的论战，形成第二次数学危机，也由此引发了极限理论的产生，并由此建立了完整的实数理论。罗素悖论的发现，造成了数学基础的崩溃，引发了第三次数学危机。为此，数学家们展开了长期的激烈的争论，形成了一系列学派，大大促进了集合论的研究，导致数理逻辑等新学科的产生，并使数学在更加严密的基础上得到了迅猛的发展。同时，悖论也有助于原有理论的进一步完善和严密。悖论的发现和消除使人们对有关理论的实质、适用条件和范围等的认识和理解更加深刻、明确。

数学悖论的出现虽然暂时引起人们的思想混乱，对正常的科学研究可能会形成一定的冲击，但它对于揭露原有理论体系中的逻辑矛盾，对于揭露原有理论的缺陷或局限性，对于进一步深入理解、认识和评价原有科学理论，对于原有科学概念或理论的进一步充实完善和促进科学理论的产生都有相当重要的意义。为科学研究提供重要的课题和研究方向。正如爱因斯坦说的“提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因此解决问题，也许是数学上或实际上的技能而已。而提出新的问题、新的可能性，从新的角度去看旧的问题都要创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步。”

总之，悖论会不断出现，我们应该通过对历史的回顾和总结，来提出对各种悖论的认识。悖论是科学问题的重要来源，是引导人们向未知领域探索的向导。我们应该自觉地应用悖论方法，通过不断地发现悖论和提出新的悖论，通过发现和揭露原有理论体系中的逻辑矛盾的形成原理、概念的缺陷来促进数学的发展。