试论彭加勒的数学思想方法

○武建春
(内蒙古广播电视大学 教学部理工系, 内蒙古 呼和浩特 010010)

内容摘要: 笔者主要阐述了彭加勒关于数学创造发明中的数学直觉的思想,其中包括数学创造的心智过程、直觉与数学美、直觉思维与逻辑思维的关系以及数学教育的观点,并指出其思想方法的深远影响和现实意义。

关 键 词: 彭加勒;数学思想方法;数学直觉;数学美
中图分类号: O119 **文献标识码**: A **文章编号**: 1671-0916(2006)01-0085-03

朱尔 ·昂利 ·彭加勒 (Juks Henri Poincaré, 1854—1912年)是法国著名的数学家、物理学家和科学哲学家。他在数学方面的研究和贡献涉及数学的各个分支,当代数学不少研究课题都溯源于他的工作,他被认为是 19世纪末、20世纪初数学界的领袖人物。彭加勒在哲学著作《科学与假设》(1902年)、《科学的价值》(1905年)、《科学与方法》(1909年)中,对科学方法论进行了专门研究,关于数学发明创造、直觉与逻辑的关系、数学美等问题都有精辟论述和独到见解,其思想对 20世纪众多重要的科学家、哲学家、心理学家曾产生过深远的影响。

一、彭加勒关于数学直觉的观点

(一)发明就是选择,选择能力决定于数学直觉

彭加勒认为,面对大千世界无限数目的事实,研究者从所要研究的事实中作一选择是必要的。应当如何选择?彭加勒认为有些事实只停留在个别的实用上,而有些事实是有和谐的秩序、有规律的、富有指导作用的,选择能够发现规律的事实,是科学发明的关键。数学的发明就是在数学事实的无穷无尽组合之中,舍弃无用的组合,选择出有用的、为数极少的组合,这种组合能够揭示表面看来彼此之间毫无联系的元素间的亲缘关系,导致发现数学定律。“发明就是识别、选择”[1]。

那么,这种选择能力由什么决定呢?彭加勒认为是由数学直觉决定的。数学直觉是对无穷无尽的组合中有用的组合做出甄选、鉴别。所以说,数学直觉是“数学次序的感觉”,即是发现隐藏于数学对象内在的和谐与关系。比如高明的棋手能够想像为数众多的组合,并把它们记在心里,而且更能觉察到某一组合是全局胜出的内在根据,他有次序的感觉。就如“数学证明不是演绎推理的简单并列,它是按某种次序安置演绎推理,这些元素安置的顺序比元素本身更为重要。如果我具有这种次序的感觉,也可以说这种次序的直觉,以便一眼就觉察到作为一个整体的推理,那么我已无需害怕我忘记这些元素之一,因为它们之中每一个都在排列中得到它的指定位置,而且不要我本人费心思记忆”[1]。所以真正的发现者不是耐心地建构某些组合的工匠,在他们的思想中,只需花费很少的时间进行组合,或许从来也没有无用的组合,就可以准确地掂量,做出完美的选择,这就是直觉。

因此,彭加勒认为,数学的特殊能力不仅仅是由于十分可靠的记忆力和惊人的注意力,数学创造与直觉有很大关系。有些人具有极强的记忆力和注意力,但是上述的数学直觉力不强,虽然他能够学习和掌握数学,但无力创造;相反,有些人有很强的数学直觉力,即使他们的记忆力并非极佳,也能有所发现和创造。可以说,直觉力的多寡将决定创造成绩的大小。

(二)数学创造的心智过程

彭加勒结合自己发现数学的事实,用十分生动的语言描述数学直觉导致创造发明时的心理状态。他在证明不可能存在富克斯(Fuchs)函数(单复变自守函数)时,用了整整两周时间苦思冥想,尝试了大量的组合,但毫无结果。“一天夜晚,我不同于往常的习惯,喝了浓咖啡后,辗转反复,难以入睡,各种想法纷至沓来,我感到它们在不断地互相冲突、成对

收稿日期: 2005-07-10
作者简介: 武建春(1969-),女,内蒙古广播电视大学副教授。

结合,也就是说,最后形成稳定的组合,第二天早晨,我便构造出了这种函数"。随后他企图找到这个函数的表达式,恰在这时,他参加一个地质考察旅行,旅途的景致使他忘却了数学工作。然而,"当我的脚踩上踏板的一刹那,一种想法涌上我的心头,即我通常定义富克斯函数的变换等价于非欧几何学的变换,在我的先前的思想中,似乎没有什么为它铺平道路"。

在这里可以看到彭加勒把数学创造的心理过程分为四个阶段:有意识阶段、无意识阶段、顿悟、(整理、证明)阶段。

1. 有意识的自觉过程,是开动大脑机器的阶段,尽管努力后得不到预期的结果,但它驱动无意识的机器。如果事先没有有意识的努力,则无意识的机器就不会运转,也不会有顿悟出现。"实际上,正是意识开启了无意识的作用,并且或多或少地确定了无意识的方向"[2]。

为了说明有意识的作用,彭加勒作了一个极好的比喻:把组合中的基本思想元素想像为伊壁鸠鲁(Epicurus)的带钩原子。在思维完全静止时,这些带钩原子像是勾住了墙壁,是不动的。这种完全禁止的状态可以无限期地延续下去,因而它们之间也谈不上产生什么组合。但初期的有意识的工作使某一些原子被动员起来,以无数不同的方式运动,做出组合。即使还是找不到满意的组合,这些原子一旦开始运动之后,就不会返回到它们的初始状态。于是这些被动员起来的观念原子相互碰撞,互相组合,或者飞向那些尚未动员起来的观念原子,并与之结合把它动员起来。在这些新的结合中,在这些有意识努力的间接结果中,可能蕴含着顿悟的产生。

2. 无意识过程往往产生于长久的有意识思维过程之后。无意识过程在数学创造中起着重要的作用。无意识的自动作用不仅构造各种各样的组合,而且它知道如何选择有用的、为数极少的组合,而这种选择的标准就是"数学的美感";"有用的组合恰恰就是最美的组合"[1]因此,无意识更机智、更敏锐,无意识过程的不自觉工作形成的和谐、有用的组合终将唤起直觉即顿悟的出现。

3. 数学直觉以"顿悟"的形式表现。顿悟即顿然醒悟,是长期无意识工作的结果。

4. 紧随顿悟产生之后,需要第二个时期有意识的工作。因为无意识状态下产生的直觉只是工作成果的出发点,而非研究工作本身,必须进行有意识的工作,从这一结果推导出直接的结论,整理它们,用语言表达出证明,而尤其必须验证这一证明。

同时,彭加勒指出产生直觉的三种途径:首先求助于感觉和想像;其次借助于归纳进行概括、用科学实验对象描述产生;最后是纯粹的数的直觉。他认为,前两种途径不具有必然性,只有纯粹数的直觉能够给真正的数学推论提供原则,使数学家在没有感觉介入的情况下"一眼就觉察到逻辑大厦的总蓝图"。

(三)数学美

彭加勒对数学美有着强烈的感受。他认为数学直觉被"数学的美感"所控制,数学家产生直觉(或做出选择)的规律是数学的审美感起着微妙的筛选作用,缺乏这种审美感的人永远不会成为真正的创造者。为什么有用的、最美的组合能从无意识状态进入意识领域呢?彭加勒认为这是直接或间接地受着审美情感的深刻影响。因为人的心理倾向总是追求简单、和谐、稳定的外部刺激,正如人们感觉的所有的刺激物中,只有最强的才能引起人们的注意。他认为一切真正的数学家都懂得真正的美感,这种美感是从属于感情的。

数学美是"各部分的和谐秩序,并且纯粹的理智能够把握它"。他认为这种美使数学结构具有让我们感官满意的彩虹般的外表,"这种雅致感、和谐感是所有引入秩序的东西,是所有给出统一、容许我们清楚地观赏和一举理解整体和细节的东西。可是,这正好是产生重大结果的东西"[1]。具有这种感觉去预知数学中隐藏着的关系与和谐的人,才能够做出数学发现。他认为数学美具有以下基本特性:

1. 数学美的简单性。"我们经常用到的"、"最富有指导作用的"事实就是最简单的。也就是说数学的简单性表现在应用的广泛性和理论的抽象性上。

2. 数学美的思维经济性。彭加勒认为"数学的雅致感仅仅是由于解适应我们精神的需要而引起的满足,这个解之所以能够成为我们的工具,正是因为这种适应。因此,这种审美的满足与思维经济密切相关"。思维的经济性用它产生的效益来衡量,也就是说用"允许节省的思维数量来衡量"。例如名词"收敛的一致性"的运用就省却了冗长的推理形式,所以,"思维之经济是科学的永恒趋势,同时也是美的源泉"[1]。

(四)逻辑用于证明,直觉用于发明

彭加勒不同意把数学完全归于逻辑,而与直觉无关。他认为"纯逻辑永远也不能使我们得到任何东西;它不能创造任何新东西;任何科学也不能仅仅从它产生出来。……任何科学,除了逻辑之外,还需要其他东西。为了称呼这种东西,我们只好使用直觉这个词"。对于科学的进步来说,逻辑和直觉同样是必要的,"二者都有其合法任务"。

直觉具有一览遥远目标的本领。"逻辑告诉我们走这一条路保证不会遇到任何障碍;但是它不会告诉我们哪一条路能达到目的。为此,必须从远处瞭望目标,教导我们瞭望的能力是直觉。没有直觉,几何学家便会像这样的作家,他只是按语法写诗,但却毫无思想"[1]。因此,不仅在数学的发明方面,而且在数学的推理方面,也需要直觉的帮助,"倘若正确地利用直觉向我们提供的前提,我们便能学会合理地推理"[1]。在此意义上,直觉就是全部逻辑推理

链的前提或基础。

彭加勒同时也看到了直觉的缺点,这就是直觉不能给人们提供严格性与可靠性。他举例说直觉可以让我们不假思索地断言:每一个连续函数都有导数,因为每一条曲线都有切线,而逻辑的命题告诉我们:存在没有导数的连续函数。因此,他十分强调了直觉与逻辑的互补性:"逻辑和直觉各有其必要的作用,两者缺一不可。唯有逻辑能给我们以可靠性,它是证明的工具,而直觉是发明的工具。"

(五)数学教育思想

彭加勒强调数学教学中要尽早培养学生的直觉思维。他指出:"数学教学的主要目的是发展精神的某些能力,其中直觉并不是最不珍贵的。正是通过直觉,数学世界才依然与真实世界保持接触,即使纯粹数学家没有真实世界也能工作,但总是必须求助于它,以填平符号与实在分隔开的鸿沟。"利用直觉更能促进逻辑思维能力的发展。他认为,"没有直觉,年轻人在理解数学时便无从着手;他们不可能学会热爱它,他们从中看到的只是空洞的玩弄辞藻的争论;尤其是,没有直觉,他们永远也不会有应用数学的能力"。

彭加勒认为学习前人已有成果,也是一种"发明",是重新发明,"发明"不仅仅是创造新定理、新理论。他主张"教师应该使儿童走他的祖先走过的路;更要快些,但不要越站"。这说明"再创造"的数学思想在彭加勒的数学教育思想中就已经存在。

彭加勒还注意到"数学定义的粗糙性"。他认为数学家所处理的大部分对象长期以来并没有完全定义,只是借助于感觉和想像来描述它们,对它们仅有一个粗糙的图像,完善的逻辑定义是没有的。因此,在数学概念教学时,需要引导学生意识到原始概念的粗糙性,意识到需要使概念更精确。彭加勒建议用例子引入定义是必要的,借助于直觉为逻辑定义开辟道路,而不应该代替逻辑定义。例如分数的定义,在小学要定义分数,先从分割苹果等物体开始;在中学,分数是用横线分开的两个整数的组合,这样学生的思维逐渐趋向于逻辑定义。

二、彭加勒数学教育思想的影响

彭加勒作为一位科学家和哲学家,他关于数学创造发明的精辟论述,其本身不仅具有重要的价值,而且为进一步研究提供了必要的基础。他的哲学著作《科学与假设》、《科学的价值》、《科学与方法》被译成英文、德文、日文、中文等五十多种文字,在世界各国广为流传,数学发明心理学成为世界数学教育研究的热点之一。法国著名数学家雅克·阿达玛(Hadamard)的经典名著《数学领域中的发明心理学》,就是追随彭加勒数学创造的思想,对其思想作了进一步研究。前苏联心理学家 B. A. 克鲁捷茨基在数学学习心理学研究方面也受到彭加勒思想的影响。他的名著《中小学生数学能力心理学》关于数学美对数学创造力的论述,与彭加勒的思想一脉相承。日本数学家、数学教育家米山国藏《数学的精神 思想方法》关于"数学发现所需要的精神活动、数学发现者的素质"的论述,主要是彭加勒有关思想理论的进一步研究。他同样认为直觉的产生并非偶然,必须以事先作过有意识的努力为先决条件,产生直觉以后的有意识的努力是很必要的。同时认为培养和陶冶数学研究者最重要的素质是数学美感。

20世纪 30年代,彭加勒的哲学著作在我国就已翻译出版,但没有引起足够的重视。50年代至 70年代,我国哲学界有些学者把彭加勒的哲学思想斥之为"唯心主义的胡说"。80年代以来,经徐利治等著名学者的倡导,数学方法论在我国数学界获得了广泛的重视和迅速的发展,关于数学发明、创造的心理学方法研究,许多学者有专门的研究和论述,而且都不同程度地受到彭加勒思想的影响。例如徐利治青年时代受彭加勒数学思想的影响,促使他研究数学创造的心理学方法,他对数学创造的一般心智过程作了概括,强调发散思维在数学创造中的重要作用,指出数学直觉是数学教育的重要内容,要重视直觉能力的培养。彭加勒的数学教育思想,对于我国当今提倡素质教育、培养创新能力有很大的借鉴意义。传统的数学教育过多注重逻辑思维能力的训练,这当然是重要的,但是,忽视了数学直觉等非逻辑思维能力的培养。教学过程中,教师过分地强调数学形式上的严谨,不能把生动、丰富、有趣的发现和探索过程展露在学生面前,使学生不能充分体会数学的思想、方法和精神,不能领略、尝试数学创造的乐趣,学生的直觉洞察力没能够得到及时培养和有效发挥,创新意识没有得到足够重视和提高。研究彭加勒的数学思想,重视数学直觉在智力开发中的作用,培养学生的数学直觉能力,教给学生寻找真理和发现真理的本领,对推动数学教育改革具有重要意义和作用。

参 考 文 献:

[1] 彭加勒. 科学的价值[M]. 北京:光明出版社, 1988.
[2] 阿达玛. 数学领域中的发明心理学[M]. 南京:江苏教育出版社, 1988.

[责任编辑 石俊梅]