

## 基于区间估计的综合评判方法及其应用

钟小伟<sup>1,2,3</sup>, 傅鸿源<sup>1</sup>

(1. 重庆大学 建设管理与房地产学院, 重庆 400030)

(2. 重庆大学 物理学院, 重庆 401331)

(3. 西藏农牧学院, 西藏 林芝 860000)

**摘要:** 综合评判方法是系统评价中重要的数据处理方法. 为了克服传统综合评判方法中的数据信息用“点”数值的不足, 考虑整个评价过程中的数据信息用“区间数”表示的合理性, 构建基于区间估计的综合评判方法. 指标评价区间估计的集值统计处理, 指标权重区间估计的区间判断矩阵处理, 综合评判区间可能度分析. 通过案例分析表明, 综合评判方法具有较强的可行性和操作性, 特别适用于综合评判中的数据信息不确定情形.

**关键词:** 区间估计; 集值统计; 区间判断矩阵; 综合评判; 可能度

### 1 引言

有关系统评价的理论和方法, 归纳起来大致可以分为三类: 第一类是以数理为基础的理论, 以数学理论和解析方法对评价系统进行严密的定量描述和计算; 第二类是以统计为主的理论和方法, 通过统计数据来建立只能凭感觉而不能测量的评价项目的评价模型, 可以说这是一种试验性的评价方法, 也是心理学领域的常用方法; 第三类是重现决策支持的方法<sup>[1]</sup>.

综合评判问题在实际决策中广泛存在, 综合评判方法是近年来系统评价中较流行的数据处理方法. 所谓综合评判, 就是对受到多种因素制约的事物或对象作出一个总的评价. 传统的综合评判方法主要有德尔菲法、层次分析法、模糊评价法、关联矩阵法、关联树法、可能—满意度法和费用—效益分析法等, 这些方法在实践中具有简单、实用、易于操作的特点, 因而得到广泛的应用, 但也存在一些问题, 如量化值不易确定; 对评价结果的置信度以及变动范围, 很难作出估计; 有关人员掌握的信息没有得到充分的挖掘, 当有关人员对某一指标进行评价时, 他可能会考虑诸如变动范围等许多情况, 但原有估计方法却不能充分利用这些信息<sup>[2]</sup>. 也就是说, 原有综合评判方法处理问题时, 往往忽略了专家在评审思维过程中的随机性、模糊性及主观性等非线性行为, 得到的综合评判结果有时并不能较好地反映问题的真实情况<sup>[3]</sup>.

在现实中常常遇到要求专家评价的事物难以准确定量或无法定量时, 整个评价过程含有许多不确定性、随机性和模糊性, 并且要涉及到心理因素<sup>[4]</sup>. 随着社会、经济的发展, 人们所考虑问题的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性不断增强, 在实际决策问题中, 决策信息往往以区间数形式表达<sup>[5]</sup>.

为了克服传统综合评判方法中的数据信息用“点”数值的不足, 考虑整个评价过程中的

数据信息用“区间数”表示的合理性, 构建基于区间估计的综合评判方法, 包括指标评价区间估计的集值统计处理, 指标权重区间估计的区间判断矩阵处理, 综合评判区间可能度分析.

## 2 区间数运算

**定义 1** 称闭区间  $X = [x_1, x_2]$  为正区间数, 其中  $x_1, x_2 \in R, 0 < x_1 \leq x_2, R$  为实数域.

**定义 2** 设  $X = [x_1, x_2], Y = [y_1, y_2]$  为正区间数, 则

$$X + Y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]; \quad X \cdot Y = [x_1 y_1, x_2 y_2]; \quad \frac{X}{Y} = \left[ \frac{x_1}{y_2}, \frac{x_2}{y_1} \right]$$

## 3 指标区间估计分析

我们所习惯的概率统计试验, 多数是对某物理量进行观测, 很少依赖于人的心理反映. 物理心理学的大量实验表明, 通过各种感觉器官而获得的心理反映量与外界的各种物理刺激量的变化之间存在着相当准确的幂函数定律, 说明科学的心理测量方法可以客观地反映现实; 对于那些没有物理、化学或其它测量手段度量的非量化的对象, 心理测量便成了数量化的一种重要手段. 在国外, 各种心理量表广泛用于社会、经济、管理系统. 我们在对系统进行实际的分析时, 也离不开专家评定法<sup>[6]</sup>. 在普通的概率统计中, 每次试验所得到的是相空间(可能观测值的集合)中的一个确定的点. 如果每次试验所得到的是相空间的一个(普通或模糊)子集, 这样的试验叫做集值统计试验<sup>[6-7]</sup>.

根据集值统计原理及方法, 每位专家根据自己的知识、经验、直觉等给出指标的区间估计. 设方案的第  $i$  个评价指标的估计区间序列:

$$\left[ u_{i1}^{(1)}, u_{i2}^{(1)} \right], \left[ u_{i1}^{(2)}, u_{i2}^{(2)} \right], \dots, \left[ u_{i1}^{(m)}, u_{i2}^{(m)} \right]$$

$m$  为专家个数. 令

$$u_{i1} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m u_{i1}^{(k)}, \quad u_{i2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m u_{i2}^{(k)}$$

则该方案的第  $i$  个评价指标的估计区间为  $U_i = [u_{i1}, u_{i2}]$ .

设  $U_i = [u_{i1}, u_{i2}]$  对应的标准化区间为  $U_i^* = [u_{i1}^*, u_{i2}^*]$ , 其中:

越大越好型:

$$U_i^* = [u_{i1}^*, u_{i2}^*] = \frac{1}{\max_k u_{i2}^{(k)} - \min_k u_{i1}^{(k)}} [u_{i1} - \min_k u_{i1}^{(k)}, u_{i2} - \min_k u_{i1}^{(k)}]$$

越小越好型:

$$U_i^* = [u_{i1}^*, u_{i2}^*] = \frac{1}{\max_k u_{i2}^{(k)} - \min_k u_{i1}^{(k)}} [\max_k u_{i2}^{(k)} - u_{i2}, \max_k u_{i2}^{(k)} - u_{i1}]$$

## 4 指标权重区间分析

层次分析法(AHP)将测度理论引入社会经济系统, 建立模型时, 使用的是传统数学方法, 处理的数据是“点”数据或“刚性”数据, 若用来处理不确定性问题, 显然是不合适的. 对不确

定性的判断,采用区间标度则更为适用.其判断矩阵以区间判断矩阵给出,然后由区间判断矩阵导出被比较元素的权重区间,计算出各层元素的组合权重区间<sup>[8]</sup>.

#### 4.1 区间判断矩阵

区间层次分析法 (IAHP) 在作两两判断、形成区间数判断矩阵时,其元素用一个区间表示,区间中点和宽度分别用不同的标度来确定.区间中点的确定可采用传统的 AHP 法的 9 标度法,区间中点可以理解为判断的一个基数,基数确定后,再根据该判断的模糊性和不确定性,给出该判断的可能取值范围,即区间长度<sup>[8]</sup>.

**定义 3** 称  $A = (A_{ij})_{n \times n}$ ,  $A_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$  为区间判断矩阵,若满足

- 1)  $A_{ii} = [1, 1], i = 1, 2, \dots, n$ ;
- 2)  $\forall i, j, \frac{1}{9} \leq a_{ij} \leq b_{ij} \leq 9$ ;
- 3)  $A_{ij} = \frac{1}{A_{ji}}$ .

#### 4.2 指标权重区间计算<sup>[9]</sup>

- 1) 区间判断矩阵的一致性逼近矩阵

**定理** 设  $A = (A_{ij})_{n \times n}$ ,  $A_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$  为区间判断矩阵,取

$$m_{ij} = \sqrt[2n]{\prod_{k=1}^n \frac{a_{ik}b_{ik}}{a_{jk}b_{jk}}}$$

则  $M = (m_{ij})_{n \times n}$  为满足互反性的一致性数字判断矩阵,其权重向量

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

其中

$$w_j = \sqrt[2n]{\prod_{k=1}^n a_{jk}b_{jk}} / \sum_{i=1}^n \sqrt[2n]{\prod_{k=1}^n a_{ik}b_{ik}}, \quad j = 1, \dots, n$$

- 2) 极差矩阵

$$\Delta M_1 = (\Delta_1 m_{ij})_{n \times n} = (m_{ij} - a_{ij})_{n \times n}$$

$$\Delta M_2 = (\Delta_2 m_{ij})_{n \times n} = (b_{ij} - m_{ij})_{n \times n}$$

- 3) 误差传递公式

$$(\Delta_k w_j)^2 = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n m_{ij}\right)^4} \sum_{i=1}^n \Delta_k^2(m_{ij}), \quad k = 1, 2$$

- 4) 权重区间

$$\Delta w_j = (w_j - \Delta_1 w_j, w_j + \Delta_2 w_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

## 5 综合评判区间分析

- 1) 综合评判区间函数.采用区间加权法:

$$f = \sum_{i=1}^n \Delta w_i U_i^*$$

- 2) 综合评判区间分析.

设区间数

$$U_i = [u_{i1}, u_{i2}], U_j = [u_{j1}, u_{j2}], (i \neq j)$$

其中

$$\text{len}(U_i) = u_{i2} - u_{i1}$$

定义 4  $U_i \leq U_j (i \neq j)$  的可能度<sup>[10]</sup>

$$P(U_i \leq U_j) = \frac{\max\{0, \text{len}(U_i) + \text{len}(U_j) - \max(0, u_{i2} - u_{j1})\}}{\text{len}(U_i) + \text{len}(U_j)}$$

性质: 1) 若  $P(U_i \leq U_j) = p$ , 则  $P(U_j \leq U_i) \leq 1 - p$ ;

2) 若  $P(U_i \leq U_j) \geq P(U_j \leq U_i)$ , 则  $U_i \leq U_j$ .

## 6 案例分析

考虑煤炭生产企业的综合评判, 一般考虑产量、效益、成本、安全等指标因素. 假设现在有两个备选方案, 用基于区间估计的综合评判方法进行演示分析比较.

### 6.1 指标区间估计及计算

请 5 位专家对两个方案的四个指标给出区间估计.

表 1 专家给出的指标区间估计

方案	专家	产量 ( $U_1$ )	效益 ( $U_2$ )	成本 ( $U_3$ )	安全 ( $U_4$ )
甲	1	[75,85]	[80,85]	[75,85]	[80,90]
	2	[85,90]	[75,85]	[70,85]	[80,85]
	3	[70,90]	[65,85]	[65,85]	[75,85]
	4	[75,85]	[75,80]	[65,80]	[70,85]
	5	[80,85]	[70,85]	[75,80]	[75,85]
乙	1	[75,80]	[75,85]	[75,80]	[70,80]
	2	[75,80]	[70,80]	[75,85]	[75,80]
	3	[70,85]	[70,85]	[70,80]	[75,90]
	4	[65,85]	[65,85]	[65,85]	[70,85]
	5	[70,80]	[70,80]	[75,85]	[70,85]

根据集值统计原理, 计算得出指标的标准化区间.

表 2 指标估计标准化区间

方案	产量 ( $U_1^*$ )	效益 ( $U_2^*$ )	成本 ( $U_3^*$ )	安全 ( $U_4^*$ )
甲	[0.35,0.85]	[0.40,0.95]	[0.10, 0.75]	[0.30,0.80]
乙	[0.30,0.85]	[0.25,0.90]	[0.10,0.65]	[0.10,0.70]

## 6.2 指标权重区间计算<sup>[9]</sup>

假设在专家给出的区间判断矩阵的基础上所得的综合区间判断矩阵

$$A = \begin{pmatrix} [1.00, 1.00] & [3.00, 4.50] & [1.50, 2.70] & [1.00, 2.00] \\ [0.22, 0.33] & [1.00, 1.00] & [0.40, 0.90] & [0.25, 0.55] \\ [0.37, 0.67] & [1.11, 2.50] & [1.00, 1.00] & [0.40, 1.20] \\ [0.50, 1.00] & [1.80, 4.00] & [0.83, 2.50] & [1.00, 1.00] \end{pmatrix}$$

进行一致性逼近及系列计算, 得到四个指标权重区间分别为:

$$\Delta w_1 = [0.3933, 0.4257], \Delta w_2 = [0.0643, 0.1198]$$

$$\Delta w_3 = [0.1451, 0.2493], \Delta w_4 = [0.2592, 0.3346]$$

## 6.3 综合评判区间分析

1) 综合评判区间函数  $f = \sum_{i=1}^4 \Delta w_i \cdot U_i^*$ .

综合评判区间: 方案甲:  $f_1 = [0.2556, 0.9303]$ ; 方案乙:  $f_2 = [0.1745, 0.8659]$ .

2) 可能度分析:  $P(f_1 \leq f_2) = 0.5061, P(f_2 \leq f_1) = 0.5533$ .

则  $P(f_2 \leq f_1) > P(f_1 \leq f_2)$ , 从而  $f_2 < f_1$ , 即方案甲较方案乙优.

## 7 结论

综合评判问题在实际决策中广泛存在, 综合评判方法是近年来系统评价中较流行的数据处理方法. 在以往的综合评判方法中, 指标评价值、指标权重、综合加权评判函数都仅仅限于“点”数据的分析处理. 随着社会经济的发展, 人们所考虑问题的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性不断增强, 评价时给出一个变动范围(区间估计), 往往更能反映实际评价决策的合理性真实性. 考虑综合评判过程中数据信息的区间估计处理需要, 提出了一种基于区间估计的综合评判方法, 包括指标评价区间估计的集值统计处理, 指标权重区间估计的区间判断矩阵处理, 综合评判区间可能度分析. 通过实例分析表明, 应用区间估计的综合评判方法的整个评判过程充分反映了评价者的真实意图, 评判结果包含了丰富的信息, 便于具体决策分析, 与实际情形吻合. 也就是说, 该方法克服了传统综合评判方法的不足, 具有较强的操作性.

## 参考文献

- [1] 汪应洛. 系统工程理论、方法与应用(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [2] 郑伟, 汤国建. 基于区间估计的系统综合评判仿真方法[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(9): 99-101.
- [3] 罗晓芳. 基于集值统计的模糊综合评判及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(9): 42-47.
- [4] 宗金峰, 赵淑芹. 引入集值统计改进德尔菲法中数据处理过程[J]. 统计与决策, 1997(3):10-11.
- [5] 徐泽水, 达庆利. 区间数的排序方法研究[J]. 系统工程, 2001, 19(6): 94-96.
- [6] 汪培庄, 刘锡荟. 集值统计[J]. 工程数学学报, 1984(1): 43-54.
- [7] 汪培庄. 模糊集与随机集落影[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
- [8] 吴育华, 诸为, 李新全, 高荣. 区间层次分析法—IAHP[J]. 天津大学学报, 1995, 28(5): 700-705.
- [9] 许先云, 杨永清. 不确定 AHP 判断矩阵的一致性逼近与排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 1998(2): 19-22.
- [10] 刘新旺, 达庆利. 一种区间数线性规划的满意解[J]. 系统工程学报, 1999, 14(2): 123-128.

# Comprehensive Evaluation Method and Its Application Based on Interval Estimation

ZHONG Xiao-wei<sup>1,2,3</sup>, FU Hong-yuan<sup>1</sup>

- (1. Faculty of Construction Management and Real Estate, Chongqing University, Chongqing 400030, China)
- (2. School of Physics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)
- (3. Tibet Agriculture and Animal Husbandry College, Linzhi 860000, China)

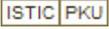
**Abstract:** Comprehensive evaluation method is an important data processing method of systematic review. In order to overcome the lack of data with the "point" value of the traditional comprehensive evaluation method, consider the whole process of data evaluation with the "interval number" that is reasonable, to build a comprehensive evaluation method based on interval estimation. indicators interval estimation of set-valued statistics processing, target weight interval estimation interval comparison matrix processing, interval possibility analysis in comprehensive evaluation. Through case analysis shows that the comprehensive evaluation method has a strong feasibility and maneuverability, especially for comprehensive evaluation of the data uncertain situation.

**Keywords:** interval estimation; set-valued statistics; interval comparison matrix; comprehensive evaluation; possibility

## 基于区间估计的综合评判方法及其应用

作者: 钟小伟, 傅鸿源, ZHONG Xiao-wei, FU Hong-yuan

作者单位: 钟小伟, ZHONG Xiao-wei (重庆大学建设管理与房地产学院, 重庆400030; 重庆大学物理学院, 重庆401331; 西藏农牧学院, 西藏林芝860000), 傅鸿源, FU Hong-yuan (重庆大学建设管理与房地产学院, 重庆, 400030)

刊名: 数学的实践与认识 

英文刊名: Mathematics in Practice and Theory

年, 卷(期): 2012, 42(1)

本文链接: [http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_sxdsjyrs201201010.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_sxdsjyrs201201010.aspx)