第 21 卷第 5 期　　大 学 数 学　　Vol.21, №5
2005 年 10 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Oct. 2005

关于假设检验中原假设的提出

任永泰
(东北农业大学 理学院, 哈尔滨 150030)

[摘　要] 在假设检验中第一步要解决的, 也是最为困难的问题就是原假设 H_0 的提出. 本文对假设检验的原理给出了解释, 并通过一个实例的讨论给出了原假设 H_0 提出的原则.

[关键词] 假设检验; 小概率原理; 原假设; 备择假设
[中图分类号] O212.1　　[文献标识码] C　　[文章编号] 1672-1454(2005)05-0121-04

1　假设检验原理概述

假设检验是统计推断中一类重要的问题. 要对总体做出判断, 常常要先对所关心的问题做出某些假定(或是猜测). 这些假定可能是正确的, 也可能是不正确的, 它们一般是关于总体分布或其参数的某些陈述, 称为统计假设. 我们一般要同时提出两个对立的假设, 即原假设 H_0 和备择假设 H_1. 在很多情况下, 我们给出一个统计假设仅仅是为了拒绝它[1].

假设检验的基本依据是"小概率原理". 所谓小概率原理就是: 概率很小的随机事件在一次试验中一般不会发生. 根据这一原理, 我们从 H_0 出发, 在一定的显著性水平 α 下, 从总体中抽取一个子样进行检验, 在 H_0 成立的条件下, 若发现"相应统计量(即随机变量)取到此子样代入统计量后的值"是一个小概率事件, 亦即小概率事件在一次试验中发生了, 这与"小概率原理"矛盾, 所以, 此时就拒绝 H_0 并接受 H_1; 反之, 就只有被迫接受 H_0.

2　问题的提出

在假设检验中第一步要解决的也是最为困难的问题就是原假设 H_0 的提出. 本文旨在讨论假设检验中原假设 H_0 如何提出. 下面以一个实例展开讨论.

例　假定如果某地矿石中某种金属含量达到 1.1% 以上时就可以认为具有开采价值. 现从该地矿石中取出 10 块. 测得该金属含量(%)为

$$0.91\quad 1.05\quad 1.12\quad 0.87\quad 1.26\quad 1.06\quad 1.16\quad 0.98\quad 1.25\quad 1.37$$

如果该金属含量服从方差为 0.01 的正态分布, 问此地矿石是否具有开采价值(给定显著性水平: $\alpha=0.05$)

本问题表面看比较简单, 属于单个正态总体, 方差已知, 均值 μ 的假设检验, 所用统计量应为 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. 但另一方面, 对 H_0 的提出按如下两种方案进行计算, 问题就出现了.

据已知及计算得相关数据 $\bar{X}=1.103$, $Z_{0.05}=1.65$, $n=10$, $\sigma=0.01$, $\mu_0=1.1$.

第一种提法:

[收稿日期] 2004-10-19

$$H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$$

拒绝域为 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_\alpha$.

将相关数据代入上式, 得 $Z = 0.95 < Z_{0.05} = 1.65$, 所以接受 H_0. 即认为矿石无开采价值.

第二种提法:

$$H_0: \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$$

拒绝域为 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_\alpha$.

经计算, $Z = 0.95 > -Z_{0.05} = -1.65$, 所以接受 H_0. 即认为矿石有开采价值.

对于同一个问题, 由于 H_0 提出的不同, 造成两个对立的结论, 显然有一个是不合理的. 如果将本问题金属含量的数据变为

1.15　1.23　1.18　1.31　1.25　1.24　1.21　1.21　1.26　1.27

据已知及计算得相关数据 $\bar{X} = 1.23$, $Z_{0.05} = 1.65$, $n = 10$, $\sigma = 0.01$, $\mu_0 = 1.1$.

对于第一种提法:

$$Z = 41.43 > Z_{0.05} = 1.65.$$

拒绝 H_0, 即认为 $\mu > \mu_0$ 而矿石有开采价值.

对于第二种提法:

$$Z = 41.43 > -Z_{0.05} = -1.65.$$

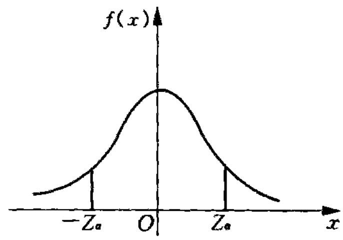
接受 H_0, 即认为 $\mu \geqslant \mu_0$ 而矿石有开采价值.

我们同样用两种方法去讨论, 只是数据不同, 而此时却得到了同一种结论. 那么, 我们应如何解释这种情况呢?

我们仍以单个正态总体方差已知, 均值 μ 的假设检验为例加以讨论

统计量为 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

我们将前文所提到的两种提法中的临界值标记在同一个坐标系下, 作出标准正态分布的概率密度图像如图 1.



第一种提法, 拒绝域为 $(Z_\alpha, +\infty)$; 第二种提法, 拒绝域为 $(-\infty, -Z_\alpha)$.

而两种提法的接受域有一个很可观的公共部分 $(-Z_\alpha, Z_\alpha)$. 所谓很可观指的是: 随机变量 $Z(Z \sim N(0, 1))$ 落入此区间内的概率非常大 $(1 - 2\alpha)$. 也就是说对于两种提法, 取样本观测值计算后, 落入此区间内是很正常的一件事. 对于第一组数据 $Z = 0.95$ 恰好落入 $(-Z_\alpha, Z_\alpha)$, 从而两种方法均为接受 H_0. 而第二组数据 $Z = 41.43$, 落入 $(Z_\alpha, +\infty)$ 区间内, 所以在第一种提法拒绝 H_0, 在第二种提法接受 H_0.

由如上所述, 因为两种提法的接受域有相当可观的公共部分, 一旦 μ 与 μ_0 离的很近, 就容易造成提法的不同而产生相互对立的结论.

也就是说对于同一个问题作假设检验时,

提法 I　$H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$.

经计算结论拒绝 H_0 而接受 $H_1: \mu > \mu_0$;

提法 II　$H_0: \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$.

经计算结论接受 $H_0: \mu \geqslant \mu_0$.

虽然所做出结论相同, 但二者绝非是一回事.

事实上, 在对原假设的真伪进行判断时, 由于样本的随机性可能使判断发生两类错误: 第一类错误(弃真错误), 其概率用 α 来表示; 第二类错误(取伪错误), 其概率用 β 来表示. 显然, 在假设检验中, 我们总是希望 α 和 β 都尽量的小. 两类错误的概率是相互关联的, 当样本容量固定时, 一类错误的概率减少

导致另一类错误的概率增加; 第一类错误的概率(即水平 α) 与接受假设的接受域相关, 两者可以互相调整; 当原假设不真时, 参数的真值越接近假设下的值时, β 的值就越大; 要同时降低两类错误的概率, 或保持一个不变而降低另一个, 只能通过增加样本容量才能解决. 而无限增大样本容量既是不现实的又是不经济的[2].

3　问题的解决及原假设提出的原则

对于上述"矿石是否具有开采价值"问题, 作者认为无论哪组数据只有提法 $H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$ 是合理的. 理由是:

假设检验的目的, 从理论上是说检验原假设的总体与样本抽自的总体, 是否发生了显著性差异, 从实际上说目的就是因为事先已经对 H_0 产生了怀疑, 而纯粹为了推翻或拒绝它. 拒绝一定要有充分的理由拒绝, 而接受只不过是在当前显著性水平下没有理由去拒绝, 是无可奈何的. 作者认为从某种意义的角度上讲对于某问题得到了拒绝 H_0 的结论, 才真正具有指导意义.

虽然 H_0 的提出目的是为了拒绝它, 但从统计理论上讲, 一旦 H_0 被提出, 就将受到保护而难于被拒绝. 那么如何提出 H_0 才能使问题的研究是合理的呢? 既然我们在对某问题做假设检验, 就应站在检验者的立场上提出 H_0, 比如本文所提到的"矿石是否具有开采价值"的例子. 某人要到某处建立矿厂, 事先对矿石中金属含量进行检验得到了一组数据, 假设检验得出的结论是, 该地具有开采价值, 试问他是无可奈何地去建厂, 还是有充分的理由去建厂呢?

总之对于假设检验的第一步 H_0 的提出是至关重要的, 为了保证 H_0 提出的合理性, 应注意遵循以下原则及结论: (其中(i), (iii) 为普遍结论, (ii), (iv), (v) 为作者见解).

(i) 将主观上产生怀疑或可能被拒绝的一方设为原假设;

(ii) 将主观上要被保护的一方设为原假设;

(iii) 如果在假设检验时作出某种错误的决策所付出的代价很高, 那么应该使作出这种错误决策的概率较低;

(iv) 当样本观测值与假设检验的相应给定值非常接近时, 本文所提到两种提法的讨论已经没有太大的实际指导意义, 应该适当增加样本容量, 继续观测进行检验;

(v) 从某种意义的角度上讲, 在假设检验中, 对于某问题得到了拒绝 H_0 的结论, 才真正具有指导意义.

4　问题的延伸

对于上述同一问题的两种提法, 显著性水平 α 也值得一提.

提法 I　$H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$, 拒绝域为 $(Z_\alpha, +\infty)$;

提法 II　$H_0: \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$, 拒绝域为 $(-\infty, -Z_\alpha)$.

对于第二组数据, 虽然结论相同均认为矿石有开采价值, 但提法 I 的结论是有充分的理由认为矿石有开采价值, 当提高显著性水平(比如 $\alpha = 0.01$) 时, 对同一组数据结论很可能接受 H_0, 因为显著性水平越高(α 越小) H_0 就越应该难于被拒绝, 这是符合统计原理的; 而提法 II 是在当前显著性水平($\alpha = 0.05$) 下没有理由去拒绝, 于是无可奈何地接受 H_0, 认为矿石有开采价值, 此时当提高显著性水平(比如 $\alpha = 0.01$) 时, H_0 就更加难于被拒绝, 事实上样本观测值 $Z = 41.43$ 更加大于变小了的临界值 $-Z_\alpha$. 这样当显著性水平提高时两种提法又产生了矛盾, 所以对于第二组数据两种提法计算结论相同, 只是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 之下的巧合而已, 一旦提高显著性水平则很可能又出现互相对立的结论.

[参　考　文　献]

[1]　邓华玲. 概率统计方法与应用[M]. 北京: 中国农业出版社, 2003.

[2]　朱松涛, 宋子兴. 概率论与数理统计[M]. 济南: 山东大学出版社, 1997.

The Pose of Original Hypothesis According to Hypothesis

REN Yong-tai
(Science College of Northeast Agricultural University, Harbin 150030, China)

Abstract: The first to solve and the most difficult problem in hypothesis is the pose of original hypothesis, which is signed H_0. This paper gives an interpretation and simple analysis to the principle of hypothesis, and the standard to pose an original hypothesis is also give through working at a specific case.

Key words: hypothesis; minor probability principle; original hypothesis; checking hypothesis