谈假设检验的假设问题

胡耀胜

(武汉商业服务学院,湖北省武汉市 430056)

摘要:假设检验是统计学教学的重点内容之一,也是数学的实际应用之一。本文结合教学以单个总体均值的假设检验为例对数学的实践问题作进一步的探讨。

关键词:假设检验;原假设;备择假设;显著性水平;统计量

中图分类号: O212 **文献标识码:** B **文章编号:** 1671-1440(2011)06-0078-02

假设检验是一种应用非常广泛的统计方法,是统计学教学重点内容之一,也是教学难点之一。其基本原理是根据小概率事件原理,所谓小概率原理是指发生概率很小的事件在一次试验中几乎是不可能发生的。根据这一原理就可以作出是否接受原假设的决定。

一、假设检验的基本概念

假设检验是预先对总体参数的取值作出假定,然后用样本数据来验证,作出接受还是拒绝原来假设的结论。先提出假设,后加以论证,再决定取舍是科学研究中常用的方法之一。

在假设检验的一开始,首先要提出一个假设,称作原假设(或称零假设、虚拟假设)通常用 H_0 表示,在提出原假设的同时,还要制定另一个假设称做备择假设(或称研究假设),通常用 H_1 表示。对于原假设,往往是人们不愿意接受而期待加以拒绝的假设,并且实际中拒绝原假设的概率(也称作显著性水平 α)是事先预知的,它往往是总体间参数相等或总体分布符合某种分布的假设,而与之相对应的备择假设往往是研究者希望去证实并期待接受的假设。

二、显著性水平

假设检验中确定了原假设为真时的可能范围

为接受域,而落入拒绝域是个小概率事件,一旦落入拒绝域,就要拒绝原假设而接受备择假设。那么应该确定多大的范围才算作是小概率呢?这要根据实际研究的对象来确定。通常用 α 来表示,我们将它称为显著性水平,有时选择 $\alpha = 0.05$,有时选择 $\alpha = 0.01$,它说明用多大的小概率来检验原假设。显然 α 愈小愈不容易推翻原假设,而一旦拒绝原假设,原假设为真的可能性就愈小。因此在假设检验中首先要规定显著性水平 α 。

三、小概率原理的数学表达式

显著性水平 α 它是一个小概率, $1 - \alpha$ 称为置信度。如对总体均值 μ 进行区间估计,总体方差为 σ ,样本均值为 $\bar{x}$,样本容量为 n ,则样本标准误差为 $s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,那么 $\bar{x}$ 落入 μ 的两侧各为多少个标准误差范围内的概率为 $1 - \alpha$,即 $P\{|\bar{x} - \mu| < Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = 1 - \alpha$,其中 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ 是正态分布条件与置信度相联系的系数,称为假设检验中区分接受域和拒绝域的临界值。它可以通过查标准正态分布表得到数据,若是 t -检验,则需查 t -分布表得数据。

四、检验统计量

对原假设检验时必然要根据样本的数据来判断。对样本数据进行加工并用来判断是否接受原假设的统计量称做检验统计量,它不含任何未知参

收稿日期:2011-07-13

作者简介:胡耀胜(1965—),男,武汉商业服务学院副教授,研究方向:数学。

数。通常有 Z 统计量和 t 统计量, 即 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 。统计量的选择要根据研究的参数及其估计量的分布、抽样的方式、总体方差是已知等多种因素来确定。

五、双侧检验与单侧检验

假设检验根据实际需要可以分为双侧检验与单侧检验, 单侧检验又进一步分为左侧检验和右侧检验。

(1) 双侧检验所针对的问题是指一些客观的指数过大和过小都不符合要求, 都需要加以检验, 这时拒绝域就落在分布的两侧, 当显著性水平为 α 时, 两边的拒绝域发生的概率各为 $\frac{\alpha}{2}$, 其临界值为

$$\pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } \pm t_{\frac{\alpha}{2}}$$

(2) 右侧检验是指有些现象的指标则要求愈来愈好, 但不能超过某一标准, 如次品率, 当超过这一临界点就要拒绝原假设, 其拒绝域在分布的右侧。其临界值为 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $t_{\frac{\alpha}{2}}$

(3) 左侧检验是有些现象的指标是愈来愈好, 而不能低于某值, 如灯管的使用寿命、药物的用效成份等, 当低于临界值就要拒绝原假设, 这时拒绝域在分布的左侧。其临界值为 $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $-t_{\frac{\alpha}{2}}$

以单个正态总体均值的假设检验为例归纳为下表

	原假设	备择假设	样本容量	统计量 (σ 已知)	统计量 (σ 未知)	临界值	拒绝域
双侧检验	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$	$n \geq 30$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}$	$ \bar{X} - \mu_0 \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
			$n < 30$			$\pm t_{\frac{\alpha}{2}}$	$ \bar{X} - \mu_0 \geq t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$
右侧检验	$H_0: \mu \leq \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$	$n \geq 30$			Z_{α}	$Z > Z_{\alpha}$
			$n < 30$			t_{α}	$t > t_{\alpha}$
左侧检验	$H_0: \mu \geq \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	$n \geq 30$	$-Z_{\alpha}$	$Z < -Z_{\alpha}$		
			$n < 30$	$-t_{\alpha}$	$t < -t_{\alpha}$		

六、实际应用举例

例: 某工厂需要购置一种耐高温的零件, 要求抗热的平均温度为 1250°C , 在过去, 供货者提供的产品都符合要求, 并从大量的数据获知零件抗热的标准差是 150°C , 在最近的一批进货中随机测试了 100 个零件, 其平均的抗热为 1200°C , 试以 95% 的把握能否接受这批产品?

解: 检验的步骤如下:

(1) 建立假设。由于检验的目的是希望产品零件抗热的均值高于 $\mu_0 = 1250^{\circ}\text{C}$, 而把低于 1250°C 的加以拒绝, 因此是一个左侧检验问题。

$$H_0: \mu \geq 1250^{\circ}\text{C} \quad H_1: \mu < 1250^{\circ}\text{C}$$

(2) 因为是大样本, 总体方差已知, 故检验统计量为 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3) 根据工厂的要求, 以 95% 的把握, 即显著性水平为 $\alpha = 0.05$, 左侧检验的临界值 $-Z_{\alpha} = -Z_{0.05} = -1.645$ (查标准正态分布表得)

$$(4) \text{ 计算统计量的数值: } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1200 - 1250}{150/\sqrt{100}} = -3.33$$

因为 $Z < -Z_{\alpha}$, 因而拒绝 H_0 , 接受 H_1 , 能以 95% 的把握认为这一批产品零件的抗高温性能低于 1250°C 而不符合要求, 因此不能接受这批产品。

参考文献

- [1] 钱小军主编. 数量方法 [M]. 北京: 高等教育出版社
- [2] 张天德主编. 概率论与数理统计 [M]. 天津: 天津人民出版社

Abstract: Hypothesis test is one of the important content of the teaching statistics, mathematics is one of the practical application. Combining with the teaching by a single overall mean of hypothesis test as example to the practice of mathematics problems for further discussion.

Key words: Hypothesis test; Original hypothesis; Choose assumptions for Significant level; statistics