编制数学试题的几种常见方法

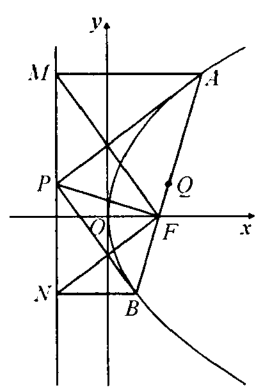
浙江省平阳中学 （325400） 何龙泉

研究数学高考试题，追究其蕴含的高等数学背景，我们渐渐发现其编制的一些规律. 其实编制数学试题和编制数学习题一样，也要符合数学习题的科学性，即：有关的概念必须是被定义的；有关的记号必须是被阐明的；条件必须是充分的、不矛盾的；条件必须是独立的、最少的；叙述必须是清楚的；要求必须是可行的[1]. 这里我们对这些原则不作展开探讨，我们主要来研讨数学试题的编制. 戴再平先生在其《数学习题理论》中阐述过编制数学习题应遵循的原理和常见的方法. 这里我们仅以演绎法、基本量法、条件变换法和逆推法为例来讨论试题的编制.

一、用“演绎法”编制试题

演绎法是一种从一般的真命题或一组条件出发，通过逻辑推理编制数学题的方法[1].

例 1 已知 AB 是抛物线 $y^2=2px$ 的过焦点 F 的弦，且 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，过 A、B 分别作准线 l 的垂线，垂足分别是 M、N，又设 P、Q 分别为 MN 和 AB 的中点，在这样的条件下，我们可以得到很多结论：



(1) 常数：$y_1y_2=-p^2$、$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$、$\dfrac{1}{|FA|}+\dfrac{1}{|FB|}=\dfrac{2}{p}$；

(2) 弦长：$|AB|=x_1+x_2+p$、$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$（$\alpha$ 是直线 AB 的倾斜角）；

(3) 垂直关系：重要的垂直关系有 $PF\perp AB$、$AP\perp BP$、$MF\perp NF$ 等等；

(4) 线段相等：$|AM|=|AF|$，$|MP|=|PF|$，$|BN|=|BF|$，$|PN|=|PF|$ 等等；

(5) 以线段 AB 为直径的圆与准线 l 相切于点 P，以线段 MN 为直径的圆与 AB 相切于点 F；

(6) 四点共圆：A,M,P,F 四点共圆，B,N,P,F 四点共圆；

(7) 三点共线：A,O,N 三点共线，B,O,M 三点共线（O 为坐标原点）；

(8) 三线共点：AP,MF 和 y 轴三线共点，BP,NQ 和 y 轴三线共点；

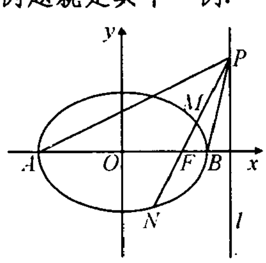
(9) AP 是抛物线在 A 点的切线，BP 是抛物线在 B 点的切线；等等.

还有很多性质，恕不一一列举. 这个问题在已知条件下，通过演绎推理可以得到很多结论. 其中的每一个结论加上前面的这个条件就成为一道很好的试题. 如 2001 年全国高考试题第 19 题：已知 AB 是抛物线 $y^2=2px$ 的过焦点 F 的弦，过 B 分别作准线 l 的垂线，垂足是 N，证明：A,O,N 三点共线. 另外，2009 年湖北省数学高考试题的解析几何题（20 大题的第一小题）也与此题(3)有关，即证明 $MF\perp NF$.

二、用“基本量法”改编的试题

基本量是一个问题系统中独立取值的量. 例如，在平面几何中，圆有半径，周长，面积等量，但基本量只有一个. 等差数列中，有首项 a_1，公差 d，第 n 项 a_n，前 n 项和 S_n 等，确定一个数列（通项公式）要两个条件，即基本量有两个；确定等差数列中的某一项，要再加一个条件，即基本量有三个，这就是等差数列中的“知三求二”了. 基本量问题在中学数学中是常见的. 又如，（标准方程的）椭圆中有 a,b,c，焦距，顶点，离心率，准线，焦半径等，但基本量只有两个. 因此要确定椭圆的标准方程只要确定两个量，也就是只要两个条件即可，如何设置这两个条件就看命题者了. 这就是我们在解析几何高考题或模拟题中看到的各式各样的条件，下面的例题就是其中一例.

例 2 已知 A、B 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，$B(2,0)$，过椭圆 C 的右焦点 F 的直线交其于点 M,N，交直线 $l:x=4$ 于点 P，且直线 PA,PF,PB 的斜率成等差数列.



（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；（2011 温州一模）

注意其中只有两个条件.

三、用“条件变换法”编制试题

条件变换法是将成题的条件加以变换而得到新题的一种数学试题或习题的编制方法. 条件的变换可以等价，也可以不等价，如弱化条件或强化条件.

例如有这样一道题：设 $f(x)$ 是 R 上的连续函

数,对任意实数 x、y,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,且 $f(1)=k$,求证 $f(x)=kx$.[2]

首先,若 $m\in N^*$,由条件 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 易得 $f(mx)=f[(m-1)x+x]=f[(m-1)x]+f(x)=\cdots=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=mf(x)$. 令 $x=1$,得 $f(m)=mf(1)=km$,即当 $x\in N^*$ 时,$f(x)=kx$ 成立.

其次,设 m、$n\in N^*$,$t\in R$,由条件 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 得 $f(nt)=nf(t)$,令 $x=nt$,即 $t=\frac{x}{n}$,所以 $f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(x)$,于是 $f(\frac{m}{n})=\frac{1}{n}f(m)=\frac{m}{n}f(1)=k\frac{m}{n}$. 再在条件 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中令 $y=-x$ 即得!令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)$,所以 $f(0)=0$. 于是 $f(-x)=-f(x)$,这样就有 $f(-\frac{m}{n})=-f(\frac{m}{n})=-\frac{m}{n}f(1)=-k\frac{m}{n}$. 这就证明了当 $x\in Q$ 时,$f(x)=kx$ 成立. 下面证明:对任意无理数 x,$f(x)=kx$ 成立.

设 x 是任一无理数,存在有理数列 $\{a_n\}$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$,因为对任一 $a_n\in Q$,则 $f(a_n)=ka_n$,由于 $f(x)$ 是 R 上的连续函数,我们有

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=k\lim_{n\to\infty}a_n=kx.$$

这样我们就证明了,对任意实数 x,$f(x)=kx$ 成立.

在这里,如果我们对条件稍稍加以放宽,如去掉"$f(x)$ 是 R 上的连续函数"这个条件,那么结论一般就不成立了. 如我们把实数集 R 改为 $A=\{x\mid x=m+\sqrt{2}n,m,n\in Z\}$,这样函数 $f(x)$ 在 A 上当然不连续了,我们就得到下面的试题:

例 3　设 $A=\{x\mid x=m+\sqrt{2}n,m,n\in Z\}$,对任意的 $x,y\in A$,函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(ⅰ) 若 $a,b\in A$,证明:$a+b,ab\in A$;

(ⅱ) 对任意的 $x,y\in A$,满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的函数除了 $f(x)=kx$ 外,是否还存在其他函数满足此条件,若存在,写出一个函数;若不存在,说明理由. (2012 年浙江大学自主招生试题)

这个例子就是典型的改变条件而编制的试题. 我们再看一道由均值不等式改变而来的高考试题,最一般的均值不等式是:

若 $a_i\in R^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$,$r>1$ 且 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$,则 $(q_1a_1^{-1}+q_2a_2^{-1}+\cdots+q_na_n^{-1})^{-1}\leqslant a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n}\leqslant q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n\leqslant(q_1a_1^r+q_2a_2^r+\cdots+q_na_n^r)^{\frac{1}{r}}$(当且仅当所有 a_i 相等时取等号)

我们取一个特例,如令 $q_i=a_i=b_i$,就得 $\frac{1}{n}=n^{-1}\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}b_i^{b_i}=b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$. 这样就得到:

例 4　(Ⅰ) 已知函数 $f(x)=\ln x-x+1$,$x\in(0,+\infty)$,求函数 $f(x)$ 的最大值;

(Ⅱ) 设 $a_i,b_i(i=1,2\cdots,n)$ 均为正数,证明:

(1) 若 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$,则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\leqslant1$;

(2) 若 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$,则 $\frac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$.

(2011 年湖北省数学高考理科卷的第 21 题)

这是把均值不等式的条件强化而得到的试题.

四、用"逆推法"编制试题

逆推法也称倒推法,是先给出题目的预期结果,由此结果出发,倒推出所需的条件的一种编制数学习题的方法[1].

我们以浙江省 2012 年高考试卷的 22 题的第(1)小题为例来说明.

例 5　已知 $a>0,b\in R$,函数 $f(x)=4ax^3-2bx-a+b$.

(1) 证明:当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,函数的最大值是 $|2a-b|+a$.

这题实际上考的是函数的凹凸性,区间 $[0,1]$ 上向下凸的函数 $f(x)$ 有这样的性质:当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,函数在 $x=0$ 或 $x=1$ 处取得最大值. 可以表示为:若函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上向下凸的函数,则 $f_{\max}(x)=\max\{f(0),f(1)\}$. 于是对于函数 $f(x)=4ax^3-2bx-a+b$,一阶导数 $f'(x)=12ax^2-2b$,二阶导数 $f''(x)=24ax\geqslant0$,所以 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的下凸函数,于是 $f_{\max}(x)=\max\{f(0),f(1)\}=\begin{cases}b-a(b\geqslant2a)\\3a-b(b<2a)\end{cases}=|b-2a|+a$,所以 $f(x)\leqslant|2a-b|+a$.

这就得到了例 5. 这是典型的利用"逆推法"编制试题的例子.

最后,我们考虑数列 $\{x_n\}$,$x_n>0$,且满足 $x_ne^{x_{n+1}}-e^{x_n}+1=0$,以及 $x_1=1$. 因为函数 $f(x)=e^x$ 在 R 上是增函数,要使 $x_{n+1}<x_n$,只要 $e^{x_{n+1}}<e^{x_n}$,可化为 $\frac{e^{x_n}-1}{x_n}<e^{x_n}$,由 $x_n>0$,只要证 $x_ne^{x_n}-e^{x_n}+1>0(x_n$

$>0)$①

考虑函数 $G(x)=xe^x-e^x+1(x>0)$, $G'(x)=xe^x>0$, $G(x)$ 在 R 上是增函数,故 $G(x)>G(0)=0$,所以 $xe^x-e^x+1>0(x>0)$. 这样①式成立,从而 $x_{n+1}<x_n$.

进一步易得 $xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1<0(x>0)$,以 x_n 代其中的 x,得 $e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}>e^{\frac{x_n}{2}}$,所以 $x_{n+1}>\dfrac{x_n}{2}$,这样我们就有 $x_n>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{x_1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. 于是得到下面的试题.

例6 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n>0$,且满足 $x_ne^{x_{n+1}}-e^{x_n}+1=0$, $x_1=1$,证明:(1) 对任意 $n\in N^*$, $x_{n+1}<x_n$; (2) $x_n>\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (2012 年浙江大学自主招生试题)

这道试题主要是由逆推,外加一点演绎推理而得到. 另外,从试题编制过程看以上四题,它们的解法都简单,这是因为编题时编题者站在高等数学的角度,居高临下就看起来很清楚、简单,但若用中学数学方法来解就很困难. 这也是这类高考试题的魅力所在.

通过上面的分析,我们大致可以看出试题编制的基本规律,除了要符合数学试题的科学性,遵循数学试题编制的原理和常见的方法外,还可以看到高考试题命题者是站在高等数学甚至现代数学的高度来编制数学试题的,站在这样的角度看中学试题,当然是"一览众山小"了,能极其清楚地直接看出试题的本质. 而我们通过研究试题的背景,目的就是通过研究去把握试题的本质,并以此来指导我们的教学实践,这对于教学具有非常重要的意义.

参考文献

[1]戴再平. 数学习题理论[M]. 上海:上海教育出版社,1991,3.

[2]吉米多维奇. 数学分析习题集[M]. 北京:高等教育出版社,1985,2.

对一类圆锥曲线常考题目结论的探究

四川南充西华师范大学数学与信息学院 (637002) 张小丹 汤 强

圆锥曲线是高中数学的主干内容之一,也是高考必考内容之一. 近年来,出现了一类涉及圆锥曲线内容的常考题目(见下表). 对于此类问题,部分学生倍感困难. 事实上,借助本文推出的两个结论,此类问题可迎刃而解.

表1 圆锥曲线的一类常考题目

来源	题 目
(2009 全国 Ⅱ 理)	已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F,过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A、B 两点,若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$,则 C 的离心率为( ).
(2010 辽宁)	设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点,过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点,直线 l 的倾斜角为 $60°$, F_1 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{3}$. (1) 求椭圆的焦距; (2) 如果 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$,求椭圆 C 的方程.
(2010 全国 Ⅱ)	已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,过右焦点 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 C 相交于 A、B 两点,若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,则 $k=$ ( ).

编制数学试题的几种常见方法

作者： 何龙泉
作者单位： 浙江省平阳中学,325400
刊名： 中学数学研究
英文刊名： Studies in Middle School Math Guangdong
年，卷(期)： 2013(3)